TEMA 4: **CÓNICAS.**

Hasta ahora hemos estudiado los subconjuntos más sencillos, desde un punto de vista geométrico, de un espacio afín o de un espacio proyectivo: las *variedades lineales* (puntos, rectas, planos, etc.), que hemos llamado subespacios afines en el caso afín y subespacios proyectivos en el caso proyectivo. Estos subconjuntos son los más simples porque vienen definidos como el conjunto de ceros de una serie de polinomios lineales (homogéneos en el caso proyectivo), es decir, vienen definidos por polinomios de grado 1. A su vez, dentro de estas variedades lineales, las más sencillas son aquellas definidas por una única ecuación lineal, que son las que hemos llamado hiperplanos (afines o proyectivos). Parece lógico pensar que los subconjuntos siguientes en cuanto a nivel de complejidad sean aquellos que se obtienen como conjunto de ceros de un polinomio (homogéneo en el caso proyectivo) *cuadrático* o de grado 2. Estos subconjuntos son las llamadas *hipersuperficies cuádricas*. Para abordarlas se pueden usar las herramientas afines, euclídeas y proyectivas que hemos ido desarrollando hasta ahora, de forma que el estudio de las cuádricas desde una perspectiva proyectiva nos dé información sobre las cuádricas afines y viceversa. De entre las hipersuperficies cuádricas estudiaremos las más sencillas, las del plano (afín y proyectivo). Estas serán las *curvas* del plano definidas por una ecuación de grado 2. A estas curvas se les llama *cónicas*.

10. Cónicas en el plano afín

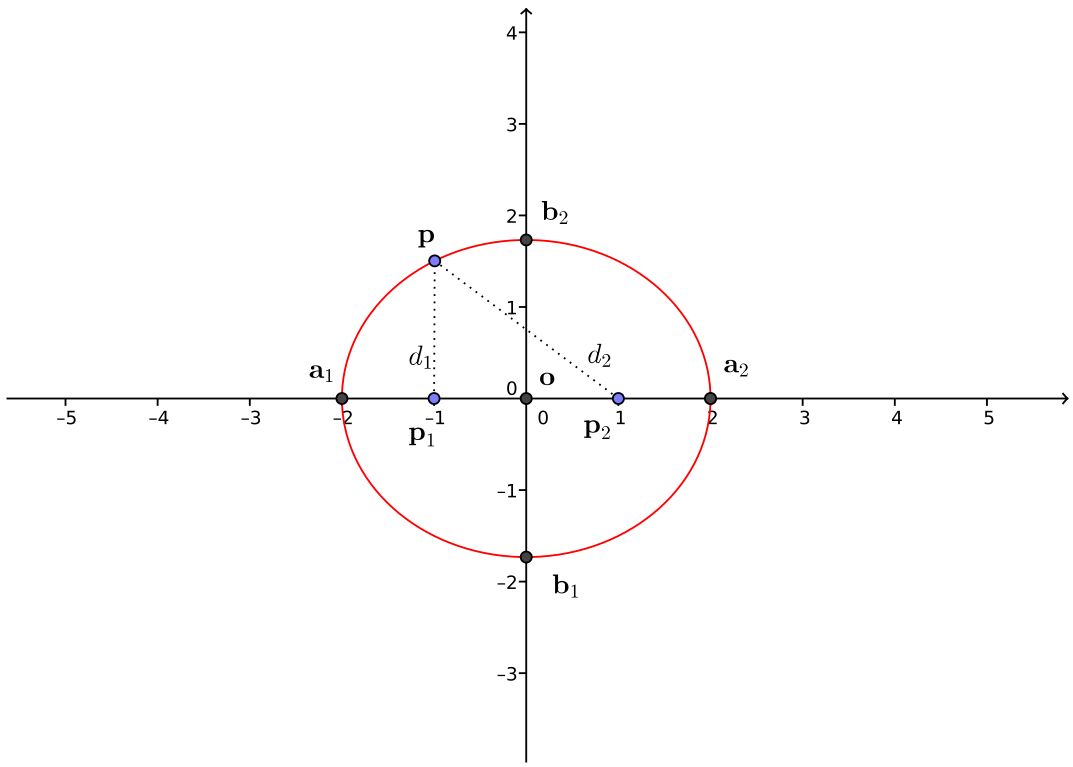
Las cónicas como lugares geométricos en el plano afín euclídeo

Las cónicas son un tipo de curvas planas cuyo estudio se remonta a los antiguos griegos. Su nombre se debe a que pueden obtenerse como secciones de un cono en el espacio afín cuando lo cortamos con diferentes planos afines.

Es posible que en el pasado hayáis visto también que una cónica se define a partir de sus propiedades métricas. Nuestro primer objetivo es justificar por medio de ejemplos que, tal y como anunciábamos en la introducción de este tema, estas cónicas definidas por propiedades métricas o como secciones cónicas son curvas que se pueden describir por una ecuación de segundo grado. Tomemos el ejemplo de una *elipse real*. Una elipse real es el *lugar geométrico* de aquellos puntos del plano afín euclídeo estándar $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ tales que la suma de sus distancias a dos puntos dados, iguales o distintos, llamados *focos* de la elipse, es constante y mayor que la distancia entre los focos. Si los dos focos son puntos distintos, la recta que los une se denomina *eje principal o mayor* de la elipse y el punto medio del segmento que determinan los focos, *centro* de la elipse. En este caso, la recta perpendicular al eje mayor por el centro de la elipse se denomina *eje secundario o menor* de la elipse. Los puntos de intersección de los ejes con la elipse se denominan *vértices* de la elipse. Los segmentos que unen el centro de la elipse con cada uno de sus cuatro vértices se llaman *semiejes* (*mayores o menores* según el eje en el que estén). Estudiamos a continuación una elipse real concreta:

Ejemplo 10.1. En el plano afín $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ con su estructura euclídea estándar consideramos los puntos $p_1 = (-1, 0)$ y $p_2 = (1, 0)$. Sea C_1 el conjunto de puntos p de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ tales que la suma de sus distancias $d_1 = \mathrm{d}(p, p_1)$, $d_2 = \mathrm{d}(p, p_2)$ a p_1 y a p_2 es $d_1 + d_2 = 4$. Por lo dicho anteriormente la curva C_1 es una elipse real, los puntos p_1 y p_2 son los focos de C_1, los ejes mayor y menor de C_1 son las rectas de ecuaciones $y = 0$ y $x = 0$, el centro de

Figura 1. Elipse C_1



C_1 es el punto $o = (0,0)$, los vértices de C_1 son los puntos $a_1 = (-2,0), a_2 = (2,0), b_1 = (0,-\sqrt{3}), b_2 = (0,\sqrt{3})$ y los semiejes de C_1 miden 2 y $\sqrt{3}$.

Veamos ahora cómo se escribe en coordenadas la condición $\mathrm{d}(p,p_1)+\ \mathrm{d}(p,p_2) = 4$. Un punto $p = (x,y)$ de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ pertenece a C_1 si y solo si

$$\sqrt{(x+1)^2+y^2}+\sqrt{(x-1)^2+y^2} = 4,$$

que, como ambos lados de la ecuación son no negativos, es equivalente a

$$(x+1)^2+y^2+(x-1)^2+y^2-16 = -2\sqrt{(x+1)^2+y^2}\sqrt{(x-1)^2+y^2}$$

y esta a

$$x^2+y^2-7 = -\sqrt{(x+1)^2+y^2}\sqrt{(x-1)^2+y^2}.$$

La última ecuación es equivalente a

$$(x^2+y^2-7)^2 = ((x+1)^2+y^2)((x-1)^2+y^2) \tag{10.1.1}$$

ya que no existen puntos (x,y) de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ que satisfagan

$$(x+1)^2+y^2+(x-1)^2+y^2-16 = 2\sqrt{(x+1)^2+y^2}\sqrt{(x-1)^2+y^2},$$

pues esto es equivalente a $\mathrm{d}(p,p_1)-\ \mathrm{d}(p,p_2) = \pm 4$, que contradice la igualdad triangular. Desarrollando y simplificando (10.1.1) obtenemos que C_1 es el conjunto de puntos $p = (x,y)$ de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ tales que

$$3x^2+4y^2-12 = 0$$

o, equivalentemente,

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1. \tag{10.1.2}$$

El ejemplo 10.1 nos muestra que podemos expresar C_1 como el conjunto de *ceros* de un polinomio de grado 2 en x e y (el polinomio $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} - 1$ o el polinomio $3x^2 + 4y^2 - 12$) o, lo que es lo mismo, como el conjunto de soluciones de una ecuación de grado 2 en x, y (la ecuación $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} - 1 = 0$ o $3x^2 + 4y^2 - 12 = 0$). Esto nos da otro enfoque para acercarnos a las cónicas: describirlas analíticamente, es decir, por medio de ecuaciones. A continuación generalizamos el ejemplo 10.1 considerando elipses reales que tienen como centro el punto $(0,0)$ y como eje mayor la recta de ecuación $y = 0$:

Ejercicio 10.2. En el plano afín $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ con su estructura euclídea estándar consideramos la elipse real E que tiene por vértices los puntos $(-a, 0), (a, 0), (0, -b)$ y $(0, b)$, donde a y b son números reales que cumplen $a > b > 0$. Demuestra que

(a) los focos de E son los puntos $p_1 = (-c, 0)$ y $p_2 = (c, 0)$, donde $c = \sqrt{a^2 - b^2}$;
(b) el eje mayor de E es la recta de ecuación $y = 0$, el eje menor de E es la recta de ecuación $x = 0$, el centro de E es el punto $(0,0)$ y los semiejes mayor y menor de E miden a y b respectivamente;
(c) los puntos p de E son aquellos puntos de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ que cumplen $\mathrm{d}(p, p_1) + \mathrm{d}(p, p_2) = 2a$;
(d) un punto $p = (x, y)$ pertenece a E si y solo si

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{10.2.1}$$

o, lo que es lo mismo,

$$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0.$$

Ejercicio 10.3. En el plano afín $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ con su estructura euclídea estándar consideramos la circunferencia S de centro $o = (\alpha, \beta)$ y radio r (siendo r un número real positivo). Demuestra que

(a) S es una elipse real en la que los focos son iguales a o (indicación: observa que un punto p de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ pertenece a S si y solo si cumple $\mathrm{d}(p, o) + \mathrm{d}(p, o) = 2r$);
(b) un punto $p = (x, y)$ pertenece a S si y solo si

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2 \tag{10.3.1}$$

o lo que es lo mismo

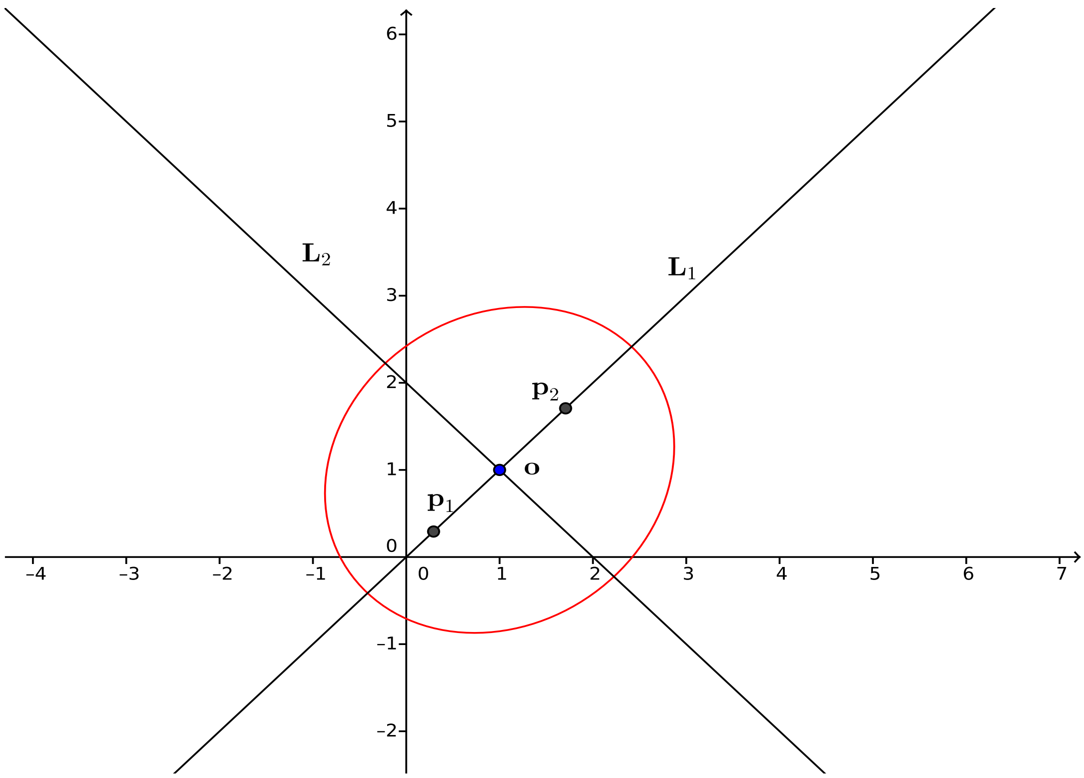
$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + (\alpha^2 + \beta^2 - r^2) = 0$$

(si $o = (0,0)$, ¿puedes obtener a partir de (10.3.1) una ecuación como (10.2.1)? ¿cómo?).

Vemos ahora otro ejemplo de elipse en el que, al contrario del ejemplo 10.1 y del ejercicio 10.2, el centro no es el $(0,0)$ y el eje mayor no es la recta de ecuación $y = 0$ (esto tendrá como consecuencia que, aun siendo de segundo grado, la ecuación (10.4.1) que obtendremos para esta elipse será más complicada que (10.2.1):

Ejemplo 10.4. En $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ consideramos los puntos $p'_1 = (-\frac{\sqrt{2}}{2} + 1, -\frac{\sqrt{2}}{2} + 1)$ y $p'_2 = (\frac{\sqrt{2}}{2} + 1, \frac{\sqrt{2}}{2} + 1)$ y el conjunto C'_1 de puntos p tales que la suma de sus distancias a p'_1 y a p'_2 es $\mathrm{d}(p, p'_1) + \mathrm{d}(p, p'_2) = 4$. Intuitivamente parece claro que C'_1 debe ser una curva muy similar a C_1, ya que en la definición de C'_1 solo hemos cambiado, con respecto a la definición de C_1, los puntos p_1 y p_2 por los puntos p'_1 y p'_2, pero la distancia entre ellos se sigue conservando,

FIGURA 2. Elipse C_1'



es decir, $\mathrm{d}(p_1, p_2) = \mathrm{d}(p_1', p_2') = 2$. En efecto, C_1' es una elipse real cuyos focos son p_1' y p_2', cuyos ejes mayor y menor son las rectas L_1' y L_2' de ecuaciones $x-y=0$ y $x+y-2=0$, cuyo centro es el punto $o' = (1,1)$ y cuyos semiejes miden 2 y $\sqrt{3}$ (más adelante veremos que C_1' es el resultado de aplicarle a C_1 la isometría que resulta de componer la traslación de vector $(1,1)$ con un giro de centro $(1,1)$ y ángulo $\pi/4$). Puedes comprobar, argumentando como en el ejemplo 10.1, que si $p = (x,y)$, la condición $\mathrm{d}(p, p_1') + \mathrm{d}(p, p_2') = 4$ es equivalente a

$$7x^2 + 7y^2 - 2xy - 12x - 12y - 12 = 0, \tag{10.4.1}$$

por lo que la elipse real C_1' es también el conjunto de ceros de un polinomio, en este caso, el polinomio $7x^2 + 7y^2 - 2xy - 12x - 12y - 12$. Este polinomio no es tan sencillo como el que nos servía para determinar los puntos de la elipse C_1 del ejemplo 10.1, pero vuelve a ser un polinomio de segundo grado.

Vemos más ejemplos de cónicas definidas como lugares geométricos:

Ejemplo 10.5. Una *hipérbola* es el lugar geométrico de los puntos del plano afín euclídeo estándar $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ tales que la diferencia de sus distancias a dos puntos dados distintos, llamados *focos* de la hipérbola, tiene valor absoluto constante y menor que la distancia entre los focos. La recta que une a los focos se denomina *eje principal* de la hipérbola y el punto medio del segmento que determinan los focos se denomina *centro* de la hipérbola. La recta perpendicular al eje principal por el centro de la hipérbola se denomina *eje secundario* de la hipérbola. Los puntos de intersección del eje principal con la hipérbola se denominan *vértices* de la hipérbola.

Consideramos ahora una hipérbola concreta: el conjunto C_2 de puntos p tales que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a $(-\sqrt{2}, 0)$ y $(\sqrt{2}, 0)$ es igual a 2 (según la definición $(-\sqrt{2}, 0)$ y $(\sqrt{2}, 0)$ son los focos de C_2, el punto $(0, 0)$ es el centro de C_2 y las rectas de ecuaciones $y = 0$ y $x = 0$ son los ejes principal y secundario de C_2). Argumentando como en el ejemplo 10.1, vemos que C_2 es la curva de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ formada por los puntos (x, y) que satisfacen la ecuación

$$x^2 - y^2 = 1. \tag{10.5.1}$$

Así pues vemos que de nuevo podemos describir la cónica C_2 como el conjunto de ceros de un polinomio de grado 2, concretamente, el polinomio $x^2 + y^2 - 1$. Como el eje principal de C_2 es la recta de ecuación $y = 0$ de la ecuación de C_2 se deduce que los vértices de C_2 son los puntos $(-1, 0)$ y $(1, 0)$.

A continuación generalizamos la segunda parte del ejemplo 10.5 (la correspondiente a la hipérbola C_2), considerando hipérbolas que tienen como centro el punto $(0, 0)$ y como eje mayor la recta de ecuación $y = 0$:

Ejercicio 10.6. En el plano afín $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ con su estructura euclídea estándar consideramos la hipérbola H que tiene por vértices los puntos $(-a, 0), (a, 0)$ y por focos los puntos $p_1 = (-c, 0)$ y $p_2 = (c, 0)$ donde a y c son números reales que cumplen $c > a > 0$. Demuestra que

(a) el eje principal de H es la recta de ecuación $y = 0$, el eje secundario de H es la recta de ecuación $x = 0$ y el centro de H es el punto $(0, 0)$;
(b) los puntos p de H son aquellos puntos de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ que cumplen $|\mathrm{d}(p, p_1) - \mathrm{d}(p, p_2)| = 2a$;
(c) un punto $p = (x, y)$ pertenece a H si y solo si

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{10.6.1}$$

o, lo que es lo mismo,

$$b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 = 0,$$

donde $b = \sqrt{c^2 - a^2}$.

Al igual que pasaba en el ejemplo 10.4, si consideramos una hipérbola cuyo centro no sea el $(0, 0)$ y cuyo eje principal no sea la recta de ecuación $y = 0$, la ecuación que obtendremos será más complicada que (10.6.1), pero seguirá siendo una ecuación de segundo grado, como puedes ver en el ejemplo 10.16.

Observación 10.7. Hay dos diferencias que saltan a la vista cuando comparamos una elipse real y una hipérbola. La primera es que los puntos de una elipse real forman un conjunto que está acotado mientras que los puntos de una hipérbola forman un conjunto que no lo está. Otra diferencia es que mientras que una elipse real que no sea una circunferencia tiene cuatro vértices, una hipérbola tiene solo dos. Esta diferencia se debe a que estamos trabajando con el cuerpo de los números reales. Si, aunque las ecuaciones que usemos sigan teniendo coeficientes reales, nos permitimos considerar no solo sus soluciones reales sino también sus soluciones *imaginarias* (es decir, extendemos el cuerpo con el que estamos trabajando y pasamos de $\mathbf{R}$ a $\mathbf{C}$), observaremos que la intersección entre una hipérbola y su eje secundario está formada por dos puntos que tienen imaginaria al menos una de sus dos coordenadas. Así pues, podríamos decir que una hipérbola tiene cuatro vértices al igual que una elipse real pero que, al contrario que esta, estos cuatro vértices son un par de vértices reales y un par de vértices *imaginarios*.

La primera diferencia a la que hemos hecho referencia en esta observación también está motivada por trabajar sobre $\mathbf{R}$ pero la estudiaremos con más precisión cuando introduzcamos el concepto de equivalencia afín de cónicas (consulta la definición 10.18, el teorema 10.31 y la observación 10.32) y la entenderemos mejor desde un punto de vista geométrico cuando veamos qué es el completado proyectivo de una cónica.

Seguimos ahora con otros ejemplos de cónicas, las *parábolas*:

Ejemplo 10.8. Una parábola es el *lugar geométrico* de aquellos puntos del plano afín euclídeo estándar $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ que equidistan de un punto, llamado *foco* de la parábola, y una recta (que no contenga al foco), llamada *directriz* de la parábola. La recta perpendicular a la directriz por el foco de la parábola se denomina *eje* de la parábola y la intersección del eje con la parábola se llama *vértice*.

Consideramos una parábola concreta: la curva C_3 formada por los puntos p que equidistan del punto $(1/4, 0)$ y la recta de ecuación $x = -1/4$ (según la definición que acabamos de dar $(1/4, 0)$ es el foco de C_3, la recta de ecuación $x = -1/4$ es su directriz, la recta de ecuación $y = 0$ es su eje y el punto $(0, 0)$ su vértice). Argumentando como en el ejemplo 10.1, vemos que C_3 es el conjunto de puntos $p = (x, y)$ que satisfacen la ecuación

$$x = y^2. \tag{10.8.1}$$

Así pues observamos que, de nuevo podemos, describir la cónica C_3 como el conjunto de ceros de un polinomio de grado 2, concretamente, el polinomio $y^2 - x$.

Otro ejemplo de parábola es el conjunto C_3' de puntos $p = (x, y)$ que cumplen $x^2 - 2x - y - 1 = 0$ (¿cuál es el foco y la directriz de C_3'?).

A continuación generalizamos la segunda parte del ejemplo 10.8 (la referente a la parábola C_3), considerando parábolas que tienen como vértice el punto $(0, 0)$ y como eje la recta de ecuación $y = 0$:

Ejercicio 10.9. En el plano afín $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ con su estructura euclídea estándar consideramos la parábola P que tiene como vértice el punto $(0, 0)$, como eje la recta de ecuación $y = 0$ y como foco el punto $(p/2, 0)$, donde p es un número real positivo. Demuestra que

(a) la directriz L de P es la recta de ecuación $x = -p/2$;
(b) un punto $p = (x, y)$ pertenece a P si y solo si

$$y^2 = 2px \tag{10.9.1}$$

o, lo que es lo mismo,

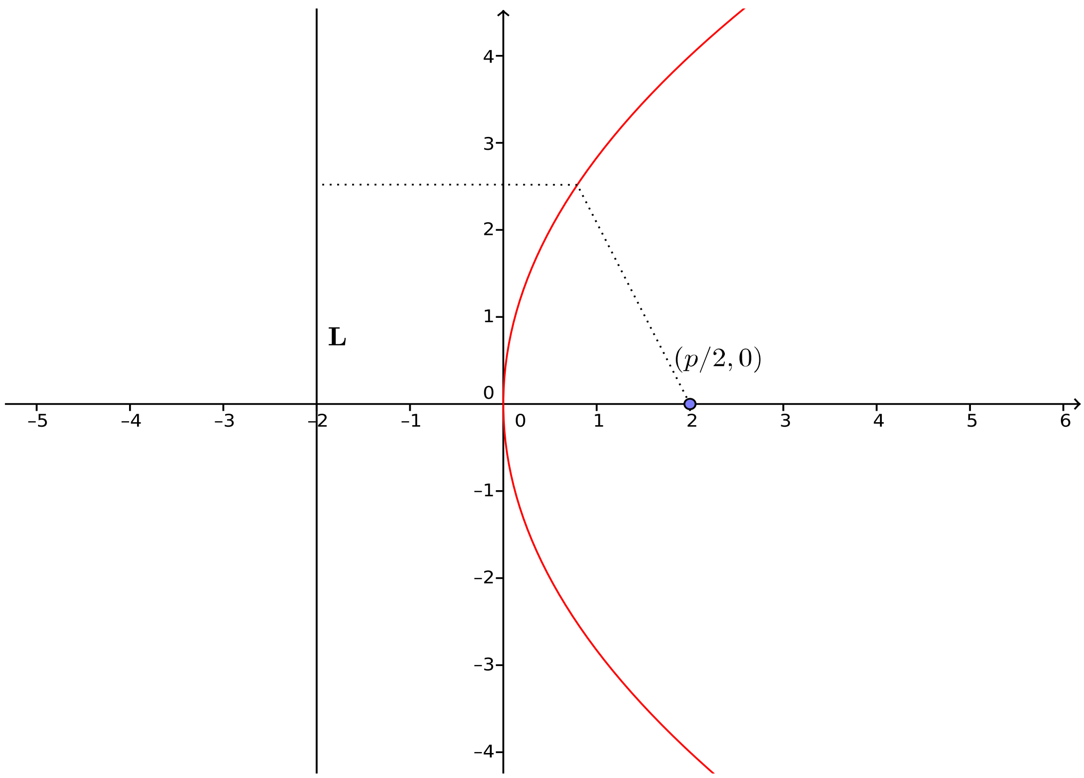
$$y^2 - 2px = 0.$$

Al igual que pasaba en los ejemplos 10.4 y 10.16, si consideramos una parábola cuyo vértice no sea el $(0, 0)$ y cuyo eje no sea la recta de ecuación $y = 0$, la ecuación que obtendremos será más complicada que (10.9.1), pero seguirá siendo una ecuación de segundo grado.

Secciones cónicas

Otro enfoque para acercarnos a las cónicas es verlas como secciones de un cono *cuádrico* (de ahí viene precisamente el nombre de cónica). Consideramos un cono cuádrico Q concreto: el conjunto de puntos (x, y, z) de $\mathbf{A}^3_{\mathbf{R}}$ que satisfacen la ecuación $x^2 + y^2 - z^2 = 0$. La sección que se obtiene al intersecar Q con el plano Π_r de ecuación $z = r$, donde $r \in \mathbf{R}, r \neq 0$,

FIGURA 3. Parábola de foco $(p/2, 0)$ y directriz la recta L de ecuación $x = -p/2$.

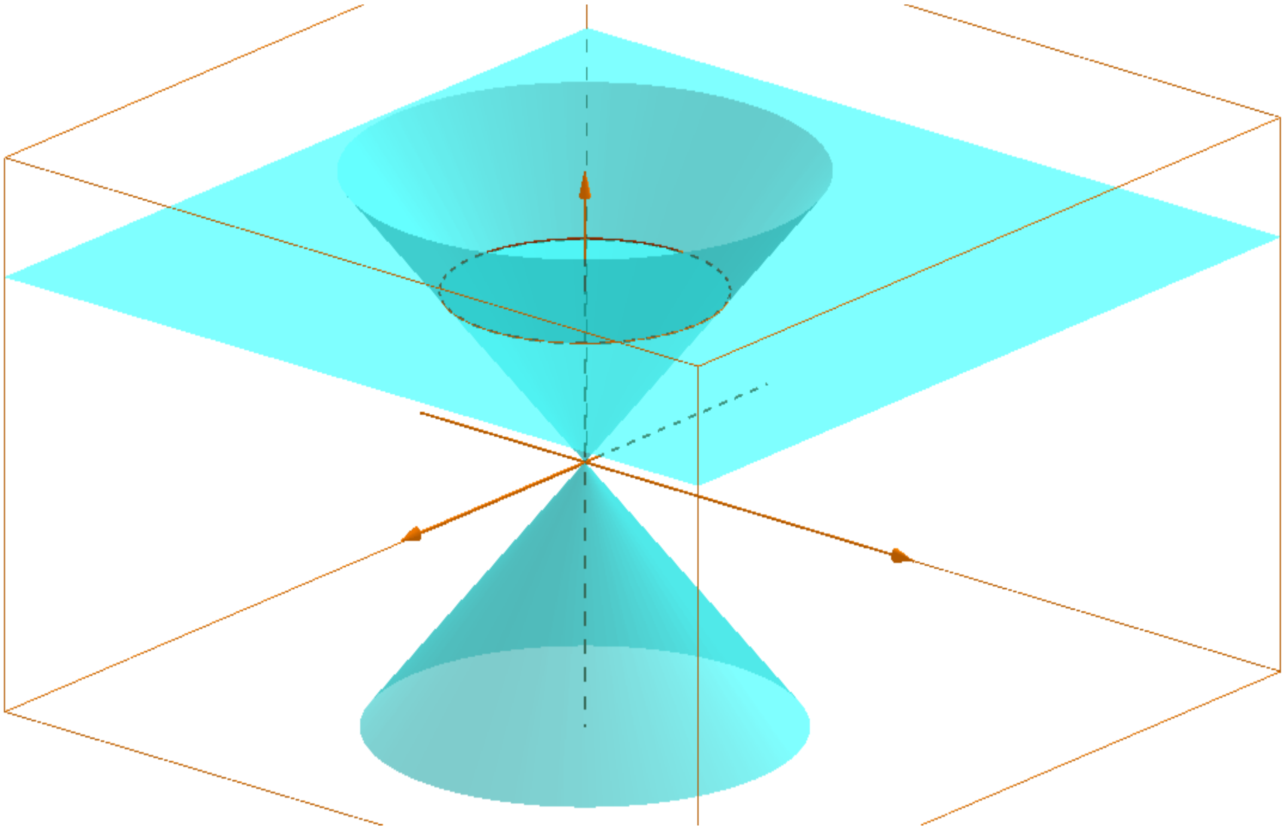


es una circunferencia contenida en Π_r, con centro $(0, 0, r)$ y radio $|r|$. Por otra parte, la intersección $Q \cap \Pi_0$ consiste solamente en el punto $(0, 0, 0)$ por lo que Q es efectivamente un cono, cuyo vértice es el punto $(0, 0, 0)$. El nombre de cuádrico viene del hecho de que Q está definido por una ecuación cuadrática en las variables x, y, z.

Si intersecamos Q con diferentes planos vamos obteniendo diferentes tipos de cónicas. Ya hemos comentado que si intersecamos Q con planos horizontales Π_r, exceptuando el plano Π_0 de ecuación $z = 0$) obtenemos circunferencias, que son un tipo especial de elipses. Por ejemplo, si intersecamos Q con el plano horizontal Π_2 de ecuación $z = 2$, obtenemos la circunferencia, de centro $(0, 0, 2)$ y radio 2, contenida en Π_2, que aparece en la figura 4. Si movemos Π_r un poco para que deje de ser un plano horizontal, la intersección con Q que obtendremos será también una elipse aunque ya no será una circunferencia. Si intersecamos Q con el plano Π de ecuación $x - y - z + 1 = 0$ obtenemos una hipérbola como muestra la figura 5. Si movemos un poco el plano Π, la intersección con Q seguirá siendo una hipérbola. Si intersecamos Q con el plano Π' de ecuación $x + z + 1 = 0$, el resultado es una parábola, como podemos ver en la figura 6.

Podemos describir las interesecciones anteriores con ecuaciones. Observa que todas ellas son curvas en un plano (Π_2, Π y Π'), así que escribiremos sus puntos en coordenadas en el plano correspondiente. Por ejemplo, en el caso del plano Π de ecuación $x - y - z + 1 = 0$, si fijamos la referencia cartesiana $\mathscr{R} = \{(0, 0, 1); (1, 0, 1), (0, 1, -1)\}$, las coordenadas de un punto $(x, y, z) = (x, y, x - y + 1)$ de Π respecto de $\mathscr{R}$ son (x, y) (como Π tiene dimensión

FIGURA 4. Intersección de Q y Π_2.

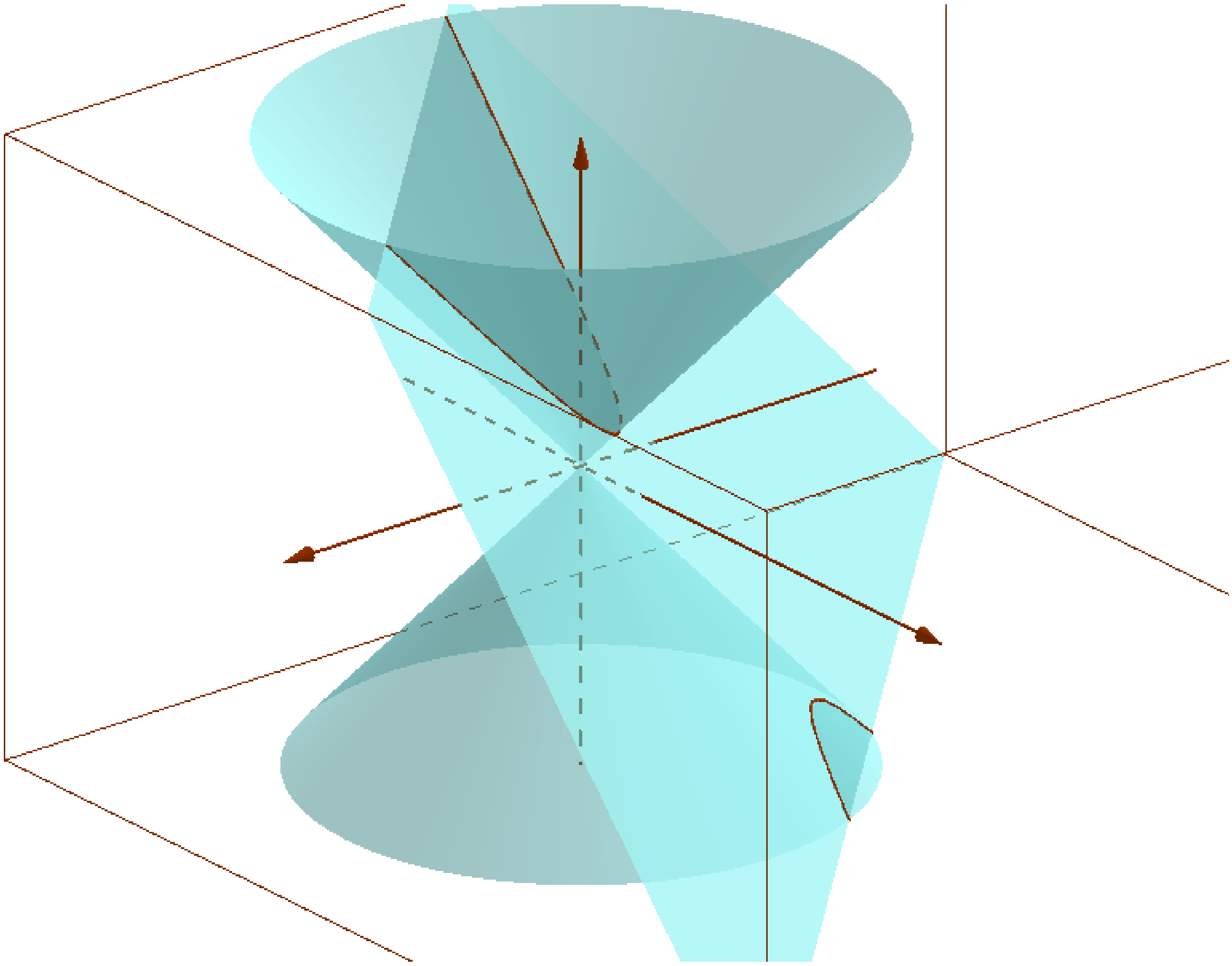


podemos expresar sus puntos con dos coordenadas). Entonces los puntos de $Q \cap \Pi$ son aquellos puntos de Π cuyas coordenadas respecto de $\mathscr{R}$ cumplen la ecuación $2xy-2x+2y-1=0$ (en la práctica, lo que hemos hecho es despejar z en función de x e y y sustituir en la ecuación de Q). De igual forma, si fijamos la referencia $\mathscr{R}_2 = \{(0,0,2);(1,0,0),(0,1,0)\}$ en el plano Π_2 de ecuación $z = 2$, la intersección $Q \cap \Pi_2$ son los puntos de Π_2 cuyas coordenadas (x,y) respecto de $\mathscr{R}$ cumplen la ecuación $x^2 + y^2 - 4 = 0$. Finalmente, si fijamos la referencia $\mathscr{R} = \{(0,0,-1);(1,0,-1),(0,1,0)\}$ en el plano Π' de ecuación $x+z+1=0$, la intersección $Q \cap \Pi'$ son los puntos de Π' cuyas coordenadas (x,y) respecto de $\mathscr{R}$ cumplen la ecuación $y^2-2x-1=0$. En los tres caso vemos que las secciones cónicas obtenidas están definidas por una ecuación de segundo grado en dos variables. De hecho esto no es exclusivo de estos tres ejemplos ya que, como la ecuación de Q es una ecuación cuadrática en tres variables x,y,z, si intersecamos Q con cualquier plano de $\mathbf{A}^3_{\mathbf{R}}$, al tener este una ecuación lineal en x,y,z, despejando por ejemplo z en dicha ecuación en función de x e y y sustituyendo en $x^2+y^2-z^2=0$, obtendremos siempre una ecuación cuadrática en dos variables. Volvemos pues a la conclusión de la subsección anterior: las cónicas (y, en este caso, podemos realmente decir las secciones cónicas) son curvas planas que vienen descritas por una ecuación de grado 2.

Definición de cónica en el plano afín estándar

Lo visto en las dos subsecciones anteriores sugiere que una forma de tratar todas las cónicas de manera unificada es considerar las curvas de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ definidas como ceros de un polinomio F de $\mathbf{R}[x,y]$ de grado 2, que es una expresión de la forma $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 +$

FIGURA 5. Intersección de Q y Π.

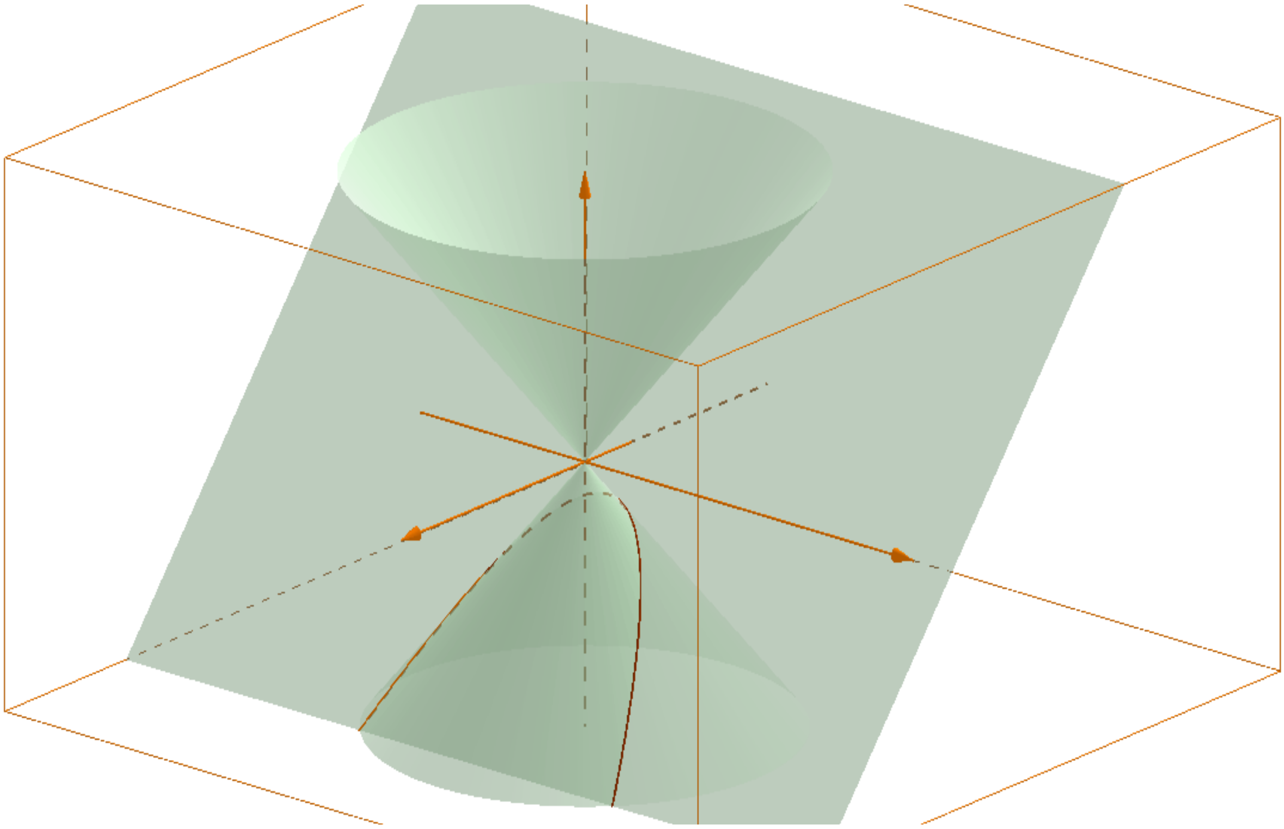


$a_{12}xy + a_{01}x + a_{02}y + a_{00}$, donde $a_{11}, a_{22}, a_{12}, a_{01}, a_{02}, a_{00} \in \mathbf{R}$ (los nombres que hemos dado a los coeficientes de F parecen ahora bastante extraños; justificaremos esta notación más adelante). Sin embargo, tomar esto como definición de cónica tiene algunos inconvenientes, que vemos en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 10.10. El lugar de ceros en $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ del polinomio $x^2 + y^2 + 1$ o del polinomio $x^2 + y^2 + 2$ es el conjunto vacío. El lugar de ceros en $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ del polinomio $x^2 + y^2$ es el conjunto $\{(0,0)\}$.

El ejemplo 10.10 nos muestra que hay polinomios de grado 2 de $\mathbf{R}[x,y]$ cuyo conjunto de ceros en $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ es un conjunto finito, posiblemente vacío. Calificar tales conjuntos como curvas es contrario a la intuición, por lo que, en un primer momento, sentiríamos la tentación de excluir estos polinomios y sus conjuntos de ceros de la definición de cónica. Sin embargo, esto no es deseable pues rompería la manera uniforme con la que queremos estudiar las cónicas. Por otra parte, si consideramos los conjuntos de ceros de los polinomios del ejemplo 10.10 no en $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ sino en $\mathbf{A}^2_{\mathbf{C}}$, vemos que, estos sí, son conjuntos infinitos (y de hecho, el conjunto de ceros de cualquier polinomio de grado 2 en dos variables lo es). Vemos además que aunque en $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ el conjunto de ceros de $x^2 + y^2 + 1$ y de $x^2 + y^2 + 2$ es el mismo (el conjunto vacío), no pasa lo mismo cuando consideramos los conjuntos de

FIGURA 6. Intersección de Q y Π'.



ceros de x^2+y^2+1 y de x^2+y^2+2 en $\mathbf{A}^2_{\mathbf{C}}$ (de hecho, dos polinomios F_1 y F_2 de $\mathbf{R}[x,y]$ de grado 2 tendrán el mismo conjunto de ceros en $\mathbf{A}^2_{\mathbf{C}}$ si y solo si existe $\lambda \in \mathbf{R}^*$ tal que $F_2 = \lambda F_1$). Esto motiva la definición de cónica que daremos finalmente, que tiene sentido no solo sobre $\mathbf{R}$ sino en el plano afín estándar sobre cualquier cuerpo $\mathbf{k}$:

Definición 10.11. Sea $\mathbf{k}$ un cuerpo. Definimos la siguiente relación de equivalencia en el conjunto de polinomios de grado 2 de $\mathbf{k}[x,y]$: dos polinomios F_1 y F_2 son equivalentes si y solo si existe $\lambda \in \mathbf{k}^*$ tal que $F_2 = \lambda F_1$. Una *cónica* de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{k}}$ es una clase de equivalencia de polinomios de grado 2 de $\mathbf{k}[x,y]$. Si F un polinomio de grado 2 de $\mathbf{k}[x,y]$, diremos que la cónica $[F]$ tiene ecuación $F=0$.

Observación 10.12. En la definición 10.11 está implícito que estamos fijando unas coordenadas de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{k}}$, las coordenadas en el sistema de referencia canónico; ya veremos al final de este tema qué ocurre cuando cambiamos de coordenadas. Por otra parte, es claro que si F_1 y F_2 son dos polinomios relacionados, su lugar de ceros en $\mathbf{A}^2_{\mathbf{k}}$ es el mismo. En muchas ocasiones (como en los ejemplos 10.1, 10.4, 10.5 y 10.8 y, más en general, en $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ cuando el lugar de ceros de F sea un conjunto infinito, o en $\mathbf{A}^2_{\mathbf{C}}$) el lugar de ceros de un polinomio F de grado 2 determina la cónica $[F]$ (es decir, si F' tiene el mismo lugar de ceros que F, entonces F y F' están relacionados). En estos casos podremos identificar la cónica $[F]$ con su lugar de ceros.

Según hemos visto, la ecuación de una cónica es un polinomio de grado 2, en dos variables, igualado a 0. Vamos a expresar esta ecuación en forma matricial.

Atención: A partir de ahora los cuerpos con los que trabajaremos en este tema tendrán característica distinta de 2 (La razón es evidente a la vista de las matrices que aparecen en la siguiente definición).

Definición 10.13. Sea $\mathbf{k}$ un cuerpo de característica distinta de 2, sea $F = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{12}xy + a_{01}x + a_{02}y + a_{00}$ un polinomio de grado 2 de $\mathbf{k}[x, y]$ y sea $C = [F]$ la cónica de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{k}}$ correspondiente. La ecuación de C

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{12}xy + a_{01}x + a_{02}y + a_{00} = 0$$

se puede expresar como

$$\begin{pmatrix} 1 & x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{00} & \frac{1}{2}a_{01} & \frac{1}{2}a_{02} \\ \frac{1}{2}a_{01} & a_{11} & \frac{1}{2}a_{12} \\ \frac{1}{2}a_{02} & \frac{1}{2}a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0.$$

Denotamos

$$M(C) = \begin{pmatrix} a_{00} & \frac{1}{2}a_{01} & \frac{1}{2}a_{02} \\ \frac{1}{2}a_{01} & a_{11} & \frac{1}{2}a_{12} \\ \frac{1}{2}a_{02} & \frac{1}{2}a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

y decimos que $M(C)$ es una matriz asociada a la cónica C. Asimismo, denotamos como $m(C)$ a la submatriz

$$m(C) = \begin{pmatrix} a_{11} & \frac{1}{2}a_{12} \\ \frac{1}{2}a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

de $M(C)$ (observa que $m(C)$ no es nula ya que el polinomio F es de grado 2).

Observación 10.14. La matriz $M(C)$ de la definición anterior es una matriz *simétrica*. Dada una cónica C, su matriz asociada es única salvo producto por un elemento de $\mathbf{k}^*$.

Clasificación afín y métrica de las cónicas

Nos planteamos ahora una especie de problema inverso al que hemos abordado en los ejemplos 10.1, 10.4, 10.5 y 10.8. En esos ejemplos describíamos primero las cónicas C_1, C'_1, C_2 y C_3 por sus propiedades métricas (es decir, las describíamos de forma geométrica) y después hallábamos la ecuación que las caracterizaba. Posteriormente, en la definición 10.11, dijimos que en general una cónica es una clase de equivalencia de polinomios de grado 2 o, si se quiere, una ecuación de segundo grado. Por tanto, si nos dan una cónica $[F]$ de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$, donde $F = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{12}xy + a_{01}x + a_{02}y + a_{00}$ y $a_{11}, a_{22}, a_{12}, a_{01}, a_{02}, a_{00} \in \mathbf{R}$, nos gustaría ahora ser capaces de describirla geométricamente o, hablando con más propiedad, describir geométricamente su lugar de ceros, es decir, decir cuáles son las propiedades métricas que cumplen los puntos del conjunto $\{(x, y) \in \mathbf{A}^2_{\mathbf{R}} \mid a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{12}xy + a_{01}x + a_{02}y + a_{00} = 0\}$ o, al menos, decir qué aspecto tiene dicho conjunto. Supongamos ahora que nos dan las cónicas de ecuaciones (10.1.2), (10.5.1) y (10.8.1) pero que no hemos leido los ejemplos 10.1, 10.5 y 10.8. Como las ecuaciones (10.1.2), (10.5.1) y (10.8.1) son muy sencillas podemos sin muchas dificultades esbozar un dibujo de su lugar de ceros. Más aún, los ejercicios 10.2, 10.6 y 10.9 nos dicen que la cónica dada por (10.1.2) es una elipse real, la cónica dada por (10.5.1) es una hipérbola y la cónica dada por (10.8.1) es una parábola. Esos ejercicios también nos permiten hallar en cada caso los ejes, vértices, etc. de esas cónicas a partir de sus ecuaciones y decir qué condición métrica han de cumplir los puntos que pertenecen a su lugar de ceros.

Ejemplo 10.15. Imaginemos ahora que a alguien que no ha leído el ejemplo 10.4 le piden describir geométricamente o, al menos, esbozar un dibujo, del lugar de ceros dado por la ecuación (10.4.1) sin darle más información que esa ecuación. Seguramente le resultaría una tarea difícil. A nosotros, que sí hemos leído el ejemplo 10.4, nos resultará más fácil ya que sabemos cómo se construye el lugar de ceros C_1' de la ecuación (10.4.1): es el lugar de los puntos tales que la suma de sus distancias a p_1' y p_2' es igual a 4. Observamos también que la descripción geométrica de C_1' es muy similar a la descripción geométrica de C_1 en el ejemplo 10.1, ya que C_1 es el lugar de los puntos tales que la suma de sus distancias a p_1 y p_2 es igual a 4 y la distancia entre p_1 y p_2 y entre p_1' y p_2' es en ambos casos 2. Finalmente nos damos cuenta de que si queremos transformar los focos p_1' y p_2' de C_1' en los focos p_1 y p_2 de C_1 mediante una isometría (como una isometría transforma rectas en rectas y conserva las distancias, observa que en ese caso transformaremos también el eje mayor de C_1' en el eje mayor de C_1 y el centro de C_1', que es el punto $(1,1)$, en el centro de C_1, que es el punto $(0,0)$) lo que podemos hacer es considerar la composición f de la traslación t_v de vector $v=(-1,-1)$ seguida del giro g de centro $(0,0)$ y ángulo $-\pi/4$. Como f es una isometría y por tanto conserva las distancias, f no solamante lleva p_1' a p_1 y p_2' a p_2 sino que transforma un punto tal que la suma de sus distancias a p_1' y p_2' es 4 en un punto tal que la suma de sus distancias a p_1 y p_2 es 4. Es decir, $f(C_1')\subset C_1$ y, como la inversa de f es de nuevo una isometría, de hecho, $f(C_1')=C_1$. Poniéndonos de nuevo en el lugar de esa persona a la que han pedido describir el lugar de ceros de la ecuación (10.4.1) sin haber leído el ejemplo 10.4, si esta es capaz de dar con la isometría f, aplicándola a C_1', obtendría la cónica C_1. Esta persona podría describir las propiedades métricas de C_1 usando el ejercicio 10.2 y, deshaciendo la isometría (es decir, aplicando f^{-1} a C_1), obtener las propiedades métricas de C_1', ya que, como ya dijimos, f^{-1} es también una isometría.

A continuación comprobamos analíticamente que $f(C_1')=C_1$. Es un sencillo ejercicio ver que las ecuaciones de f^{-1} respecto de la referencia canónica de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ son

$$\begin{aligned} x' &= \tfrac{\sqrt{2}}{2}x-\tfrac{\sqrt{2}}{2}y+1\\ y' &= \tfrac{\sqrt{2}}{2}x+\tfrac{\sqrt{2}}{2}y\ . \end{aligned}$$

Como un punto $p=(x,y)$ pertenece a $f(C_1')$ si y solo si $f^{-1}(p)$ pertenece a C_1', los puntos p de $f(C_1')$ son aquellos cuyas coordenadas cumplen
(10.15.1)

$$\begin{gathered} 7(\tfrac{\sqrt{2}}{2}x-\tfrac{\sqrt{2}}{2}y+1)^2+7(\tfrac{\sqrt{2}}{2}x+\tfrac{\sqrt{2}}{2}y)^2\\ -2(\tfrac{\sqrt{2}}{2}x-\tfrac{\sqrt{2}}{2}y+1)(\tfrac{\sqrt{2}}{2}x+\tfrac{\sqrt{2}}{2}y)-12(\tfrac{\sqrt{2}}{2}x-\tfrac{\sqrt{2}}{2}y+1)-12(\tfrac{\sqrt{2}}{2}x+\tfrac{\sqrt{2}}{2}y)-12=0. \end{gathered}$$

Simplificando la ecuación (10.15.1) obtenemos que los puntos de $f(C_1')$ son lo puntos que satisfacen la ecuación

$$6x^2+8y^2-24=0,$$

que es equivalente a la ecuación (10.1.2). Es decir, $f(C_1')=C_1$, tal como habíamos argumentado más arriba.

En el ejemplo 10.15 hemos sido capaces de encontrar una isometría que transforma C_1' en una cónica de C_1 porque teníamos previamente información geométrica de cómo era C_1'. Si nos dan una cónica de la que a priori no sabemos su aspecto ni sus propiedades geométricas, ¿cómo seremos capaces de describirla? Lo vemos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 10.16. En el plano afín euclídeo estándar $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ consideramos la cónica C_2' de ecuación $7x^2+50xy+7y^2-82\sqrt{2}x-46\sqrt{2}y-178=0$. Queremos describir geométricamente el lugar de ceros de C_2'. Para ello seguiremos estos pasos.

<u>Paso 1</u>: Lo primero que haremos será buscar, si es posible, una isometría que transforme C_2' en una cónica de ecuación como las que aparecen en los ejercicios 10.2, 10.6 y 10.9. Observamos que

$$M(C_2') = \begin{pmatrix} -178 & -41\sqrt{2} & -23\sqrt{2} \\ -41\sqrt{2} & 7 & 25 \\ -23\sqrt{2} & 25 & 7 \end{pmatrix}.$$

Según el *teorema espectral* toda matriz simétrica real puede *diagonalizarse* simultáneamente por *congruencia* y por *semejanza*; es decir, existe una matriz *ortogonal* que diagonaliza dicha matriz simétrica. La matriz simétrica que consideraremos será la submatriz $m(C_2') = \begin{pmatrix} 7 & 25 \\ 25 & 7 \end{pmatrix}$ de $M(C_2')$. El polinomio característico de $m(C_2')$ es $\lambda^2 - 14\lambda - 576$, de donde los valores propios de $m(C_2')$ son 32 y -18. El subespacio propio del valor propio 32 es $L((1,1))$ y el subespacio propio del valor propio -1 es $L((1,-1))$. Tomando un vector de norma 1 de cada subespacio obtenemos una base ortonormal de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$, como por ejemplo $\{(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}), (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})\}$, formada por vectores propios de $m(C_2')$. Entonces

$$M_{B,B_c} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

y

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 7 & 25 \\ 25 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 & 0 \\ 0 & -18 \end{pmatrix}.$$

Como M_{B,B_c} es una matriz ortogonal, $M_{B,B_c}^{-1} = M_{B,B_c}^t$, por lo que

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}^{t} \begin{pmatrix} 7 & 25 \\ 25 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 & 0 \\ 0 & -18 \end{pmatrix}.$$

Consideramos ahora el isomorfismo afín g' de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ cuya matriz asociada respecto de la referencia canónica es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

Como la matriz

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

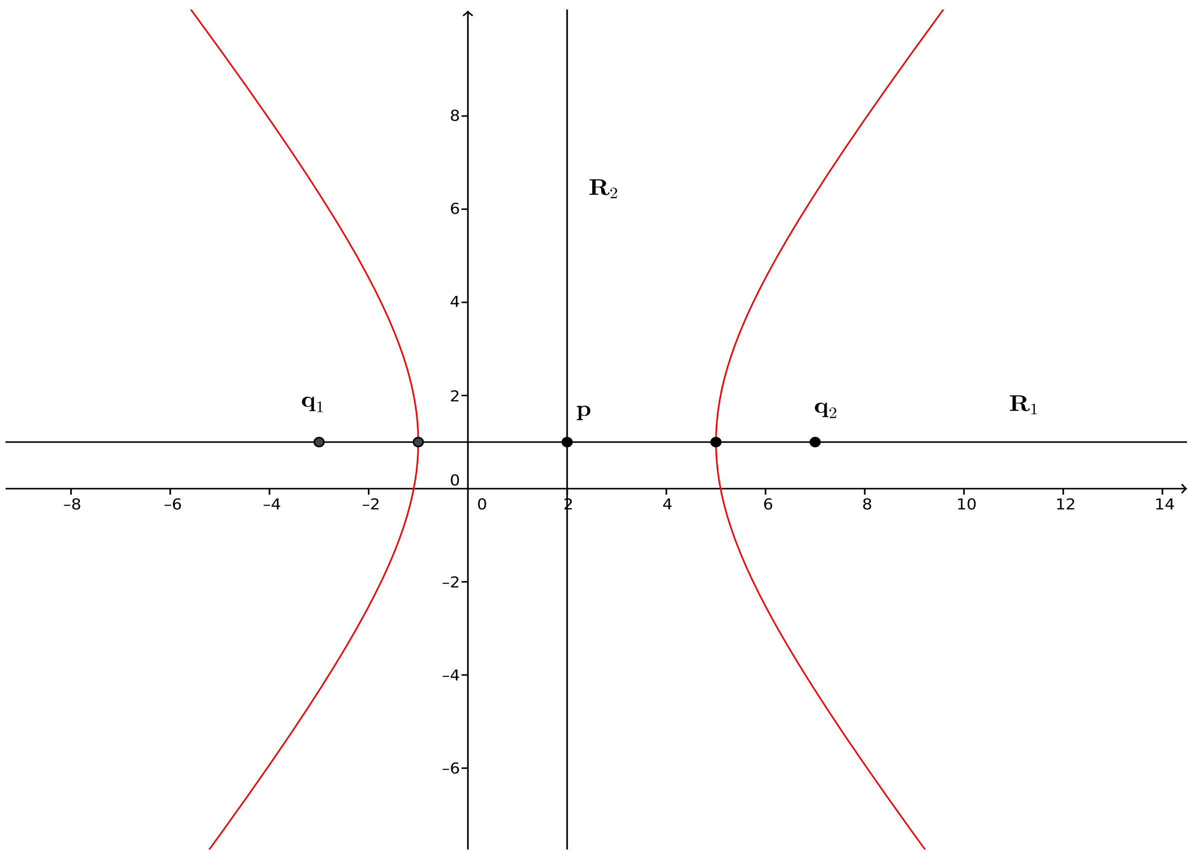
es una matriz ortogonal, g' es una isometría (de hecho, como el determinante de esa matriz es 1 y g' deja fijo el punto $(0,0)$, g' es un giro de centro $(0,0)$ y de ángulo $\pi/4$. Las ecuaciones de g' son

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}.$$

Sea ahora g la isometría inversa de g' (g será el giro de ángulo $-\pi/4$ y centro $(0,0)$). Recuerda que un punto $p = (x,y)$ pertenece a (el lugar de ceros de) $g(C_2')$ si y solo si $g^{-1}(p)$ pertenece a (el lugar de ceros de) C_2'. Como un punto (x', y') pertenece a C_2' si y solo si

$$\begin{pmatrix} 1 & x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -178 & -41\sqrt{2} & -23\sqrt{2} \\ -41\sqrt{2} & 7 & 25 \\ -23\sqrt{2} & 25 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = 0,$$

FIGURA 7. Cónica de ecuación $16x^2 - 9y^2 - 64x + 18y - 89 = 0$, de focos q_1, q_2, centro p y ejes R_1 y R_2.



un punto $p = (x, y)$ pertenece a $g(C_2')$ si y solo si

$$\begin{pmatrix} 1 & x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} -178 & -41\sqrt{2} & -23\sqrt{2} \\ -41\sqrt{2} & 7 & 25 \\ -23\sqrt{2} & 25 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0.$$

Como

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} -178 & -41\sqrt{2} & -23\sqrt{2} \\ -41\sqrt{2} & 7 & 25 \\ -23\sqrt{2} & 25 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -178 & -64 & 18 \\ -64 & 32 & 0 \\ 18 & 0 & -18 \end{pmatrix},$$

un punto p pertenece a $g(C_2')$ si y solo si

$$16x^2 - 9y^2 - 64x + 18y - 89 = 0.$$

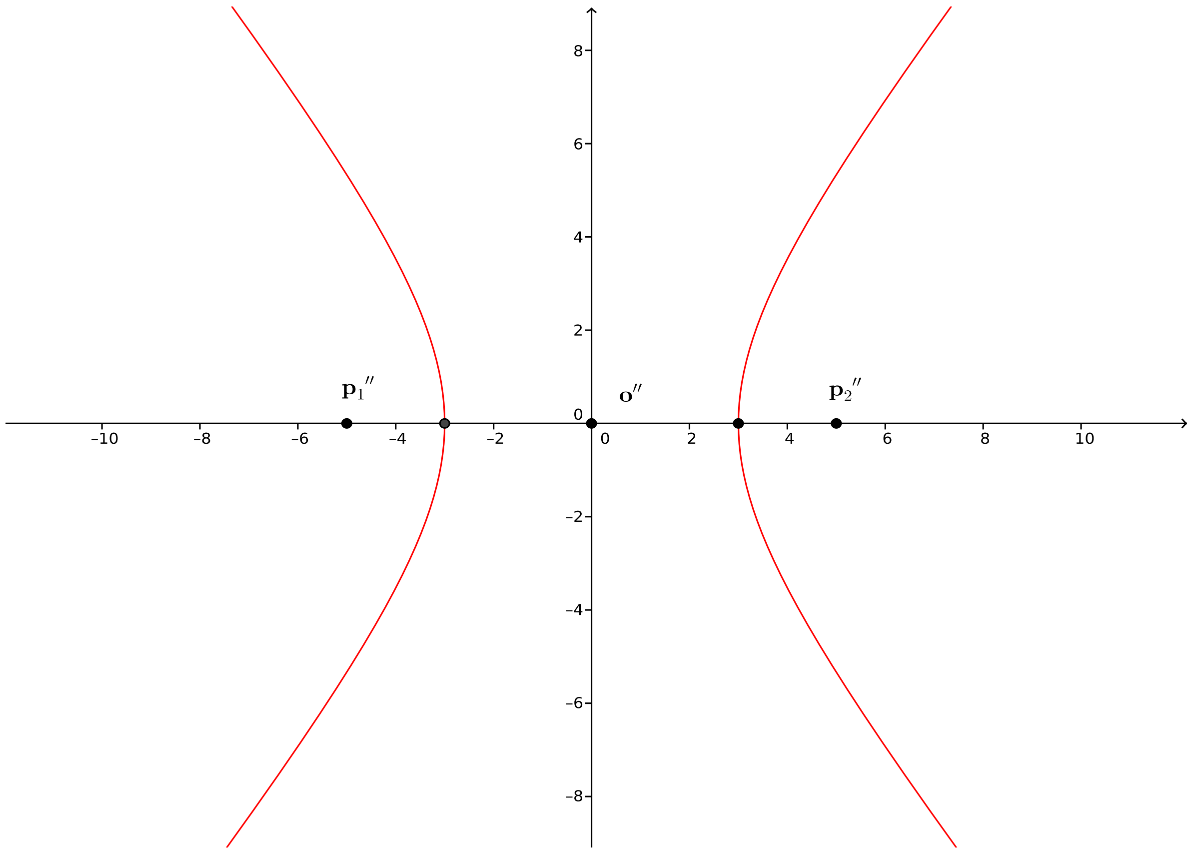
Podemos reescribir esta última ecuación como

$$16(x-2)^2 - 9(y-1)^2 - 144 = 0.$$

Consideramos ahora la traslación t de vector $(-2, -1)$, que tiene por ecuaciones

$$\begin{aligned} x' &= x - 2 \\ y' &= y - 1\,. \end{aligned}$$

FIGURA 8. Hipérbola C_2'', de ecuación $16x^2 - 9y^2 - 144 = 0$.



La imagen de $g(C_2')$ por t será el conjunto de ceros de la ecuación $16x^2 - 9y^2 - 144 = 0$. Así pues, si llamamos f a la composición $t \circ g$, podemos decir que $f(C_2')$ es la cónica C_2'' de ecuación $16x^2 - 9y^2 - 144 = 0$.

Paso 2: Usamos ahora el hecho de que en el ejercicio 10.6 vimos la descripción geométrica de C_2''. *Deshaciendo* la isometría que trasnforma C_2' en C_2'' podemos entonces obtener las propiedades geométricas de C_2'. Así pues, observa que los focos de C_2'' son $p_1'' = (-5, 0)$ y $p_2'' = (5, 0)$, el centro de C_2 es el punto $o'' = (0, 0)$, los vértices de C_2 son los puntos $(-3, 0)$ y $(3, 0)$ y los puntos de C_2'' son aquellos tales que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a p_1'' y p_2'' es igual a 6. Como $f(C_2') = C_2''$, tenemos que $C_2' = f^{-1}(C_2'')$. La isometría f tiene

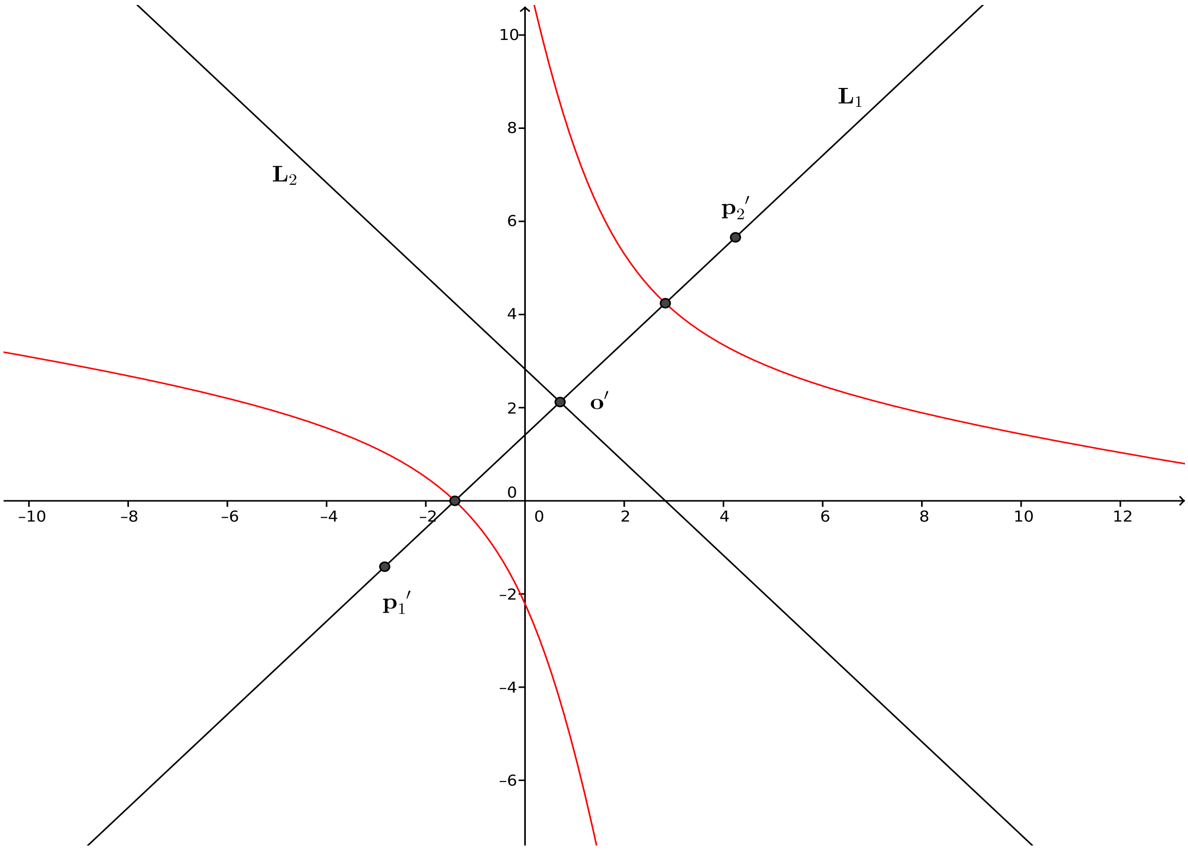
$$\begin{array}{rcl} x' &=& \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y - 2 \\ y' &=& -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y - 1 \end{array}$$

como ecuaciones respecto de la referencia canónica, por lo que f^{-1} tiene

$$\begin{array}{rcl} x' &=& \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y + \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y' &=& \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y + \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{array}$$

como ecuaciones respecto de la referencia canónica. Como f^{-1} es una isometría, concluimos que C_2' es el conjunto de puntos tales que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a los puntos $f^{-1}(p_1'') = (-2\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ y $f^{-1}(p_2'') = (3\sqrt{2}, 4\sqrt{2})$ es igual a 6. Por tanto, C_2'

Figura 9. Hipérbola C_2', de ecuación $7x^2+50xy+7y^2-82\sqrt{2}x-46\sqrt{2}y-178=0$.



es una hipérbola cuyos focos son $p_1' = (-2\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ y $p_2' = (3\sqrt{2}, 4\sqrt{2})$, su centro es $o' = f^{-1}(0,0) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2})$, su eje principal es la recta $\mathbf{L}_1$ de ecuación $x - y + \sqrt{2} = 0$, su eje secundario es la recta $\mathbf{L}_2$ de ecuación $x + y - 2\sqrt{2} = 0$, etc.

Ejercicio 10.17. Razonando como en el ejemplo 10.16 demuestra que el conjunto C_3' del ejemplo 10.8 es una parábola y describe sus propiedades métricas.

El proceso que acabamos de describir en el ejemplo 10.15 y en el ejercicio 10.16 nos sugiere la estrategia para, dada una cónica de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ arbitraria de ecuación $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{12}xy + a_{01}x + a_{02}y + a_{00} = 0$, obtener sus propiedades métricas (es decir, decidir por ejemplo si es una elipse real, una hipérbola o una parábola, dar su foco o focos, la distancia focal, etc.). La idea sería encontrar una isometría que transformara el lugar de ceros de la cónica en el lugar de ceros de otra cónica cuya ecuación sea más sencilla (de forma más precisa, si es posible, una ecuación como (10.2.1), 10.6.1 o (10.9.1)). El lugar de ceros de esa cónica de ecuación más sencilla se podría describir fácilmente y, deshaciendo la isometría, esto nos permitiría describir el lugar de ceros de la cónica de partida. Sin embargo ya vimos en el ejemplo 10.10 que no toda cónica de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ viene caracterizada por su lugar de ceros. Por ello es preciso generalizar la manera en que hemos pasado en el ejemplo 10.15, usando la isometría f, de la ecuación

$$7x^2 + 7y^2 - 2xy - 12x - 12y - 12 = 0$$

a la ecuación

$$6x^2 + 8y^2 - 24 = 0 :$$

Definición 10.18. Sea F un polinomio de $\mathbf{R}[x,y]$, sea $C = [F]$ la cónica de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ correspondiente y sea f una isometría de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$. Sean

$$\begin{array}{rcl} x' & = & \alpha_{11}x \;+\alpha_{12}y \;+\beta_1 \\ y' & = & \alpha_{21}x \;+\alpha_{22}y \;+\beta_2 \end{array}$$

las ecuaciones (con respecto al sistema de referencia canónico) de la isometría *inversa* de f (recuerda que lo que tienen que cumplir $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{22}$ para que f sea una isometría es que $\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$ sea una matriz ortogonal). En ese caso definimos la imagen de C por f y la denotamos como $f(C)$ como la cónica de ecuación $F(\alpha_{11}x+\alpha_{12}y+\beta_1, \alpha_{21}x+\alpha_{22}y+\beta_2) = 0$ (F es un polinomio de grado 2 por la observación 10.26).

Por otra parte, en el ejemplo 10.15 y en el ejercicio 10.16 también nos hemos dado cuenta de que las cónicas C_1' y C_2' tienen las mismas propiedades métricas que C_1 y C_2'' respectivamente. Así pues desde un punto de vista métrico C_1 y C_1' son *equivalentes* y lo mismo C_2'' y C_2'. La razón de que C_1 y C_1' y C_2'' y C_2' tengan las mismas propiedades métricas es que podemos transformar unas en las otras mediante una isometría (que conserva las propiedades métricas). Esto motiva que digamos que dos cónicas son *métricamente equivalentes* cuando podemos pasar de una a otra mediante una isometría:

Definición 10.19. Sean C y C dos cónicas de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$. Decimos que C y C' son *métricamente equivalentes* si y solo si existe una isometría f de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ tal que $f(C) = C'$.

Ejercicio 10.20. Demuestra que, en efecto, la equivalencia métrica de cónicas es una relación de equivalencia (indicación: puedes resolver el ejercicio de forma directa o usar la proposición 10.27).

Entre las cónicas de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$, la relación de equivalencia métrica es una relación de equivalencia muy "fina", como muestra el ejemplo siguiente:

Ejemplo 10.21. Las cónicas C_1 y C_4 de ecuaciones $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ y $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ no son métricamente equivalentes. La justificación rigurosa de esta afirmación la veremos cuando detallemos todas las clases de la clasificación métrica de las cónicas. De momento, nos conformamos con una justificación intuitiva: ambas cónicas son elipses pero la longitud de sus semiejes menores es distinta (no así la de sus semiejes mayores), por lo que no existirá una isometría que transforme una cónica en la otra. Sin embargo, son cónicas "parecidas" (como ya se ha dicho, ambas son elipses). Para expresar de forma precisa este "parecido" nos conformaremos con encontrar, en vez de una isometría, un isomorfismo afín que transforme C_4 en C_1. Por ejemplo, si consideramos el isomorfismo afín f de ecuaciones

$$\begin{array}{rcl} x' & = & x \\ y' & = & \frac{\sqrt{6}}{2}y \end{array}$$

es fácil comprobar que $C_1 = f(C_4)$. Intuitivamente lo que hace f es dejar el semieje mayor de C_4 igual y "estirar" el semieje menor de C_4, que mide $\sqrt{2}$, para que mida $\sqrt{3}$, que es lo que mide el semieje menor de C. Por eso es claro que f no es una isometría.

El ejemplo anterior nos motiva a dar la definición de una nueva relación de equivalencia de cónicas, más "débil" que la equivalencia métrica, que obtendremos relajando el requisito de que, para que dos cónicas sean equivalentes debe existir una isometría que transforma una en la otra; ahora solo pediremos que exista un isomorfismo afín. Por otra parte, como los isomorfismos afines tienen sentido para un plano afín sobre un cuerpo $\mathbf{k}$ arbitrario, la siguiente definición la haremos para cónicas de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{k}}$:

Definición 10.22. (1) Sea F un polinomio de $\mathbf{k}[x,y]$, sea $C=[F]$ la cónica de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{k}}$ correspondiente y sea f un isomorfismo afín de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{k}}$. Sean

$$\begin{array}{rcllll} x' & = & \alpha_{11}x & +\alpha_{12}y & +\beta_1 \\ y' & = & \alpha_{21}x & +\alpha_{22}y & +\beta_2 \end{array}$$

las ecuaciones (con respecto al sistema de referencia canónico) del isomorfismo afín *inverso* de f (recuerda que lo que tienen que cumplir $\alpha_{11},\alpha_{12},\alpha_{21},\alpha_{22}$ para que f sea un isomorfismo afín es que $\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{pmatrix}$ sea una matriz invertible). En ese caso definimos la imagen de C por f y la denotamos por $f(C)$, como la cónica de ecuación $F(\alpha_{11}x+\alpha_{12}y+\beta_1,\alpha_{21}x+\alpha_{22}y+\beta_2)=0$ (el polinomio F tiene grado 2 por la observación 10.26).

(2) Sean C y C' dos cónicas de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{k}}$. Decimos que C y C' son *afínmente equivalentes* si y solo si existe un isomorfismo afín f de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{k}}$ tal que $f(C)=C'$.

Ejercicio 10.23. Demuestra que, en efecto, la equivalencia afín de cónicas es una relación de equivalencia (indicación: puedes resolver el ejercicio directamente o usar la proposición 10.27).

Observación 10.24. Si dos cónicas de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ son métricamente equivalentes, también son afínmente equivalentes, ya que una isometría del plano afín euclídeo estándar es un isomorfismo afín del plano afín estándar. Por eso decimos que la relación de equivalencia métrica es más fuerte (o más "fina") que la relación de equivalencia afín.

Escribir la ecuación de una cónica usando su matriz asociada nos permite expresar de otra forma la imagen de una cónica por un isomorfismo afín o por una isometría (tal como hicimos en el paso 1 del ejemplo 10.16). También podemos reformular los conceptos de equivalencia métrica y afín en términos matriciales. Enunciamos todo esto en las dos siguientes proposiciones, que se pueden demostrar como un sencillo ejercicio:

Proposición 10.25. *Sea $\mathbf{k}$ un cuerpo con característica distinta de 2, sea C una cónica de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{k}}$ (respectivamente, de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$), sea f un isomorfismo afín de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{k}}$ en sí mismo (respectivamente, una isometría de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$) y sea N la matriz de la* inversa *de f respecto de la referencia cartesiana canónica de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{k}}$. Si $M(C)$ es una matriz asociada a C, entonces $M(f(C))=N^t\cdot M(C)\cdot N$ es una matriz asociada a $f(C)$.*

Observación 10.26. La matriz N de la proposición 10.25 es una matriz de la forma

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ \beta_1 & \alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \beta_2 & \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{pmatrix}$$

con $\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{pmatrix}$ invertible. Entonces la submatriz $m(f(C))$ cumple

$$m(f(C))=\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{pmatrix}^t\cdot m(C)\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{pmatrix}.$$

Como $m(C)$ es no nula, $m(f(C))$ tampoco lo es. Esto implica que la ecuación de $f(C)$ definida en las definiciones 10.18 y 10.22 es en efecto una ecuación de grado 2.

Proposición 10.27. *Sea $\mathbf{k}$ un cuerpo con característica distinta de 2, sean C y C' dos cónicas de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{k}}$ (respectivamente, de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$) y sean $M(C)$ y $M(C')$ matrices asociadas de C y C'. Entonces, C y C' son afínmente equivalentes (respectivamente, métricamente equivalentes) si y solo si existe $\lambda \in \mathbf{k}^*$ y una matriz*

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ D & R \end{pmatrix}$$

con $D = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$, $d_1, d_2 \in \mathbf{k}$ (respectivamente, $d_1, d_2 \in \mathbf{R}$) y R una matriz 2×2, regular, con coeficientes en $\mathbf{k}$ (respectivamente, ortogonal, con coeficientes en $\mathbf{R}$) tal que

$$M(C') = \lambda N^t M(C) N.$$

Observación 10.28. Sean C y C' dos cónicas afínmente equivalentes. Existen matrices asociadas $M(C)$ y $M(C')$ de C y C' (recuerda que la matriz asociada a una cónica no es única; es única salvo producto por un escalar no nulo) que son *congruentes.* Además, para esas matrices $M(C)$ y $M(C')$, sus submatrices $m(C)$ y $m(C')$ también son congruentes.

Damos a continuación las clasificaciones afín y métrica de las cónicas, de cuyas demostraciones solo daremos aquí un esbozo. Ya hemos visto en la observación anterior que la equivalencia métrica es más "exigente" que la equivalencia afín. Esto se traducirá en que habrá menos clases de equivalencia afín que de equivalencia métrica, por lo que la clasificación afín será más sencilla y por ella empezamos.

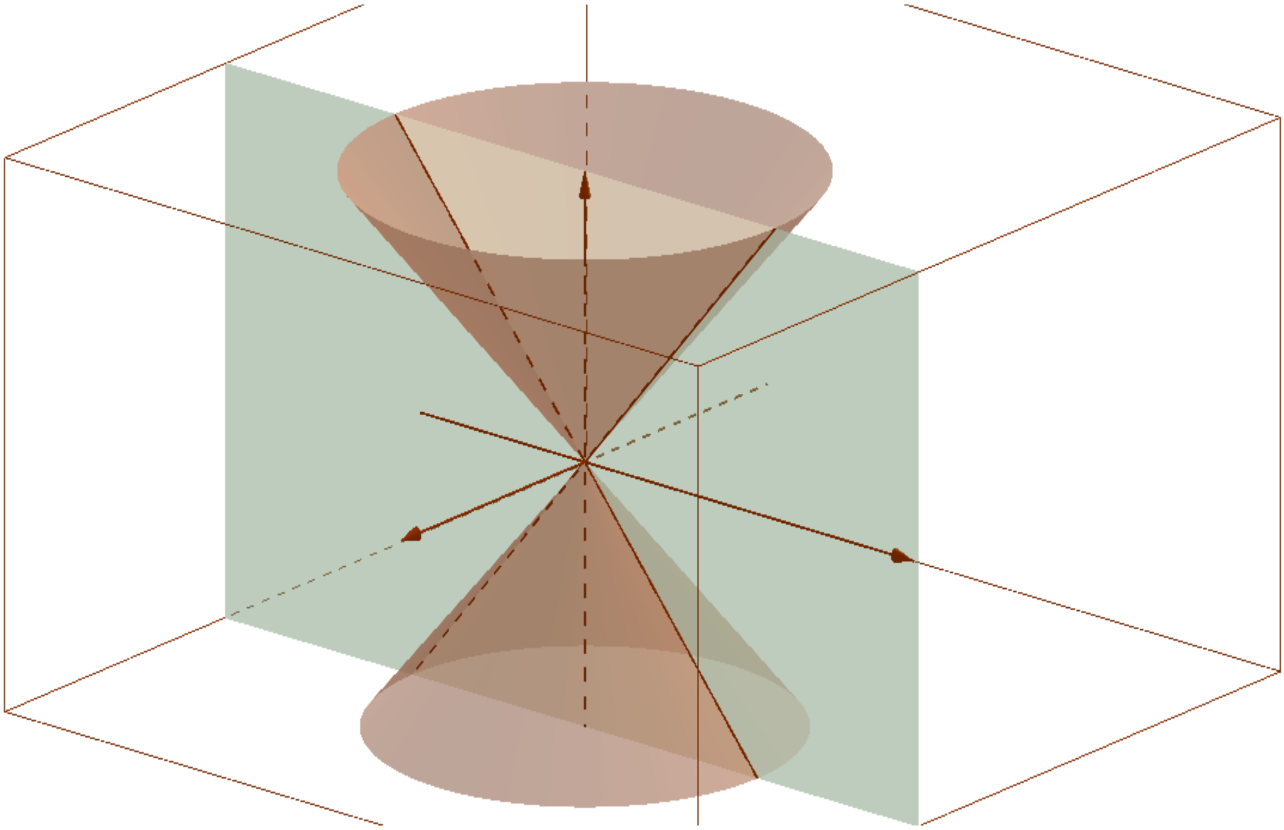
Teorema 10.29. *(Clasificación afín de las cónicas reales). Sea C una cónica de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$. Entonces C es afínmente equivalente a una y solo una de las cónicas con las siguientes ecuaciones:*

(1) $X^2 + Y^2 - 1 = 0$. *En este caso decimos que C es una* elipse real.
(2) $X^2 - Y^2 - 1 = 0$. *En este caso decimos que C es una* hipérbola.
(3) $X^2 - Y = 0$. *En este caso decimos que C es una* parábola.
(4) $X^2 + Y^2 + 1 = 0$. *En este caso decimos que C es una* elipse imaginaria.
(5) $X^2 - Y^2 = 0$. *En este caso C es un* par de rectas reales secantes.
(6) $X^2 - 1 = 0$. *En este caso C es un* par de rectas reales paralelas.
(7) $X^2 + Y^2 = 0$. *En este caso C es un* par de rectas imaginarias (conjugadas) secantes.
(8) $X^2 + 1 = 0$. *En este caso C es un* par de rectas imaginarias (conjugadas) paralelas.
(9) $X^2 = 0$. *En este caso decimos que C es una* recta doble.

En particular, dos cónicas distintas de la lista anterior no son afínmente equivalentes.

Observación 10.30. Vemos por el teorema 10.29 que existen más tipos de cónicas reales que las elipses reales, hipérbolas o parábolas. Por una parte están las elipses imaginarias (que ya aparecieron en el ejemplo 10.10) cuyo conjunto de ceros en $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ es vacío. Por otra parte están los pares de rectas (algunos de los cuales tienen conjuntos de ceros vacíos o formados por un solo punto) y las rectas dobles. A los pares de rectas y a las rectas dobles se les llama cónicas *degeneradas* y a las elipses, hipérbolas y parábolas, cónicas *no degeneradas.* Los pares de rectas secantes y las rectas dobles aparecen también como secciones cónicas cuando intersecamos el cono cuádrico Q de $\mathbf{A}^3_{\mathbf{R}}$ de ecuación $x^2+y^2-z^2 = 0$ con un plano Π que pasa por $(0,0,0)$ (según sea el plano Π, la cónica resultante será un par de rectas realas, una recta doble o un par de rectas imaginarias; en este último caso $Q \cap \Pi = \{(0,0,0)\}$). Vemos esto en las figuras 10 y 11, donde intersecamos Q con los planos de ecuaciones $x = 0$ y $x - z = 0$.

FIGURA 10. Intersección de Q con el plano de ecuación $x = 0$.



Damos también la clasificación afín de las cónicas afines complejas, que es más sencilla que la de las cónicas afines reales.

Teorema 10.31. *(Clasificación de las cónicas complejas). Sea C una cónica de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{C}}$. Entonces C es afínmente equivalente a una y solo una de las cónicas de las ecuaciones siguientes:*

(1) $X^2 + Y^2 - 1 = 0$.
(2) $X^2 - Y = 0$.
(3) $X^2 - Y^2 = 0$. *En este caso C es un* par de rectas secantes.
(4) $X^2 - 1 = 0$. *En este caso C es un* par de rectas paralelas.
(5) $X^2 = 0$. *En este caso decimos que C es una* recta doble.

En particular, dos cónicas distintas de la lista anterior no son afínmente equivalentes.

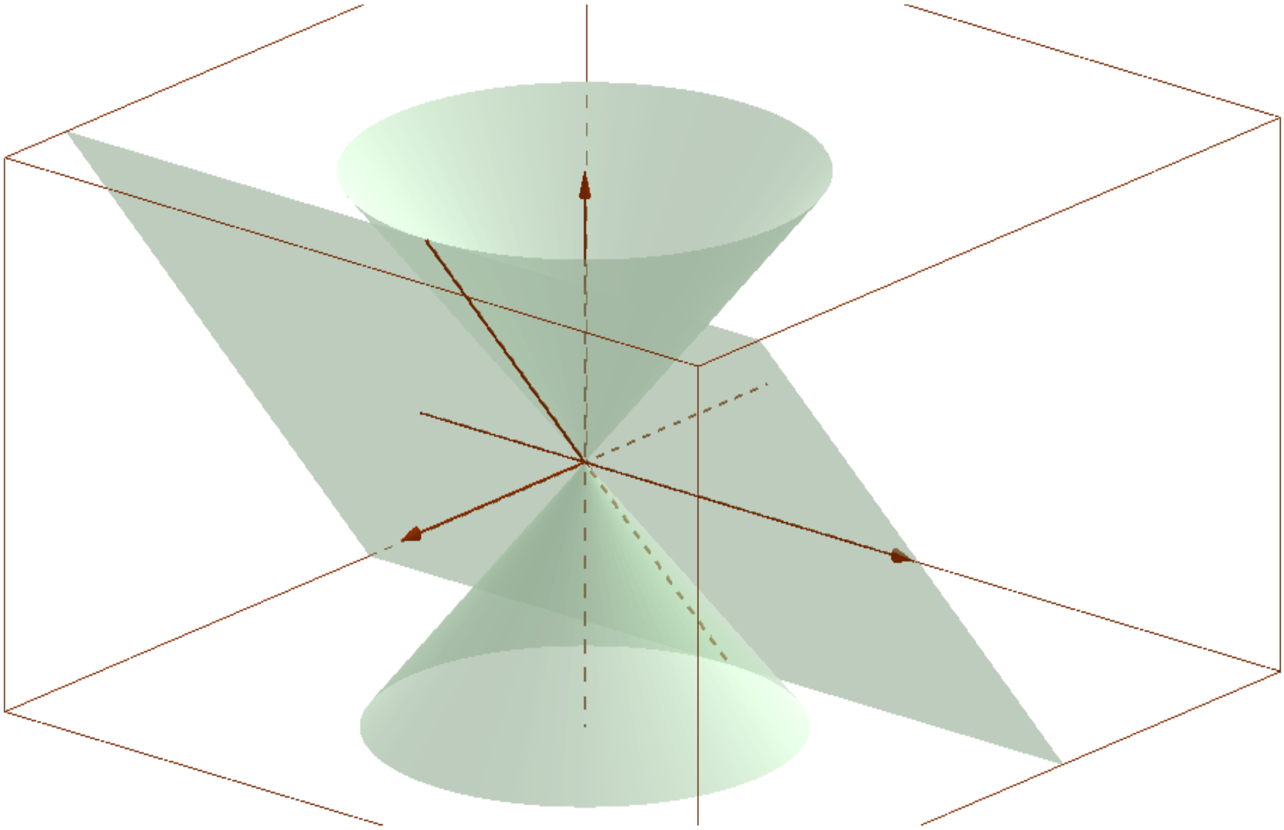
Observación 10.32. Si te resulta extraña la diferencia entre los teoremas 10.29 y 10.31, observa lo siguiente: las cónicas de ecuaciones $X^2 + Y^2 - 1 = 0$, $X^2 - Y^2 - 1 = 0$ y $X^2 + Y^2 + 1 = 0$ no son afínmente equivalentes en $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ pero sí en $\mathbf{A}^2_{\mathbf{C}}$ (¿ves por qué?). Lo mismo ocurre con las cónicas de ecuaciones $X^2 - Y^2 = 0$ y $X^2 + Y^2 = 0$ o con las cónicas de ecuaciones $X^2 - 1 = 0$ y $X^2 + 1 = 0$. Eso explica por qué se reduce el número de clases de equivalencia en el teorema 10.31 con respecto al teorema 10.29.

Damos finalmente la clasificación métrica de las cónicas reales:

Teorema 10.33. *(Clasificación métrica de las cónicas) Sea C una cónica de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$.*

(1) *Si C es una elipse real, existen $a, b \in \mathbf{R}, a \geq b > 0$ únicos tales que C es métricamente equivalente a la elipse real de ecuación $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - 1 = 0$. En particular,*

FIGURA 11. Intersección de Q con el plano de ecuación $x - z = 0$.



si $a', b' \in \mathbf{R}, a' \geq b' > 0$ *y* $(a, b) \neq (a', b')$, *la elipse real de ecuación* $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - 1 = 0$ no *es métricamente equivalente a la elipse real de ecuación* $\frac{X^2}{a'^2} + \frac{Y^2}{b'^2} - 1 = 0$.

(2) *Si* C *es una hipérbola, existen* $a, b \in \mathbf{R}, a, b > 0$ *únicos tales que* C *es métricamente equivalente a la hipérbola de ecuación* $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} - 1 = 0$. *En particular, si* $a', b' \in \mathbf{R}, a', b' > 0$ *y* $(a, b) \neq (a', b')$, *la hipérbola de ecuación* $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} - 1 = 0$ no *es métricamente equivalente a la hipérbola de ecuación* $\frac{X^2}{a'^2} - \frac{Y^2}{b'^2} - 1 = 0$.

(3) *Si* C *es una parábola, existe* $a \in \mathbf{R}, a > 0$ *único tal que* C *es métricamente equivalente a la parábola de ecuación* $aX^2 - Y = 0$. *En particular, si* $a' \in \mathbf{R}, a' > 0$ *y* $a \neq a'$, *la parábola de ecuación* $a'X^2 - Y = 0$ no *es métricamente equivalente a la parábola de ecuación* $aX^2 - Y = 0$.

(4) *Si* C *es una elipse imaginaria, existen* $a, b \in \mathbf{R}, a \geq b > 0$ *únicos tales que* C *es métricamente equivalente a la elipse imaginaria de ecuación* $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + 1 = 0$. *En particular, si* $a', b' \in \mathbf{R}, a' \geq b' > 0$ *y* $(a, b) \neq (a', b')$, *la elipse imaginaria de ecuación* $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + 1 = 0$ no *es métricamente equivalente a la elipse imaginaria de ecuación* $\frac{X^2}{a'^2} + \frac{Y^2}{b'^2} + 1 = 0$.

(5) *Si* C *es un par de rectas reales secantes, existe* $a \in \mathbf{R}, a > 0$ *único tal que* C *es métricamente equivalente al par de rectas reales secantes de ecuación* $a^2X^2 - Y^2 = 0$. *En particular, si* $a' \in \mathbf{R}, a' > 0$ *y* $a \neq a'$, *el par de rectas reales secantes de ecuación* $a'^2X^2 - Y^2 = 0$ no *es métricamente equivalente al par de rectas reales secantes de ecuación* $a^2X^2 - Y^2 = 0$.

(6) *Si C es un par de rectas reales paralelas, existe $a \in \mathbf{R}, a > 0$ único tal que C es métricamente equivalente al par de rectas reales paralelas de ecuación $X^2 - a^2 = 0$. En particular, si $a' \in \mathbf{R}, a' > 0$ y $a \neq a'$, el par de rectas reales secantes de ecuación $X^2 - a'^2 = 0$* no *es métricamente equivalente al par de rectas reales secantes de ecuación $X^2 - a^2 = 0$.*

(7) *Si C es un par de rectas imaginarias secantes, existe $a \in \mathbf{R}, a > 0$ único tal que C es métricamente equivalente al par de rectas imaginarias secantes de ecuación $a^2X^2 + Y^2 = 0$. En particular, si $a' \in \mathbf{R}, a' > 0$ y $a \neq a'$, el par de rectas imaginarias secantes de ecuación $a'^2X^2 + Y^2 = 0$* no *es métricamente equivalente al par de rectas reales secantes de ecuación $a^2X^2 + Y^2 = 0$.*

(8) *Si C es un par de rectas imaginarias paralelas, existe $a \in \mathbf{R}, a > 0$ único tal que C es métricamente equivalente al par de rectas imaginarias paralelas de ecuación $X^2 + a^2 = 0$. En particular, si $a' \in \mathbf{R}, a' > 0$ y $a \neq a'$, el par de rectas imaginarias secantes de ecuación $X^2 + a'^2 = 0$* no *es métricamente equivalente al par de rectas reales secantes de ecuación $X^2 + a^2 = 0$.*

(9) *Si C es una recta doble, C es métricamente equivalente a la recta doble de ecuación $X^2 = 0$.*

Demostración de los teoremas 10.29 y 10.33: Damos ahora un esbozo de demostración de los teoremas de clasificación de cónicas afines reales y de clasificación métrica de las cónicas. Empezamos por el teorema 10.33. Tenemos que demostrar dos cosas. La primera es ver que dada una cónica cualquiera de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ de ecuación $a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{12}xy+a_{01}x+a_{02}y+a_{00}=0$ es métricamente equivalente a alguna de las cónicas de la lista dada en el enunciado del teorema 10.33. La segunda cosa que hay que ver es que dos cónicas de la lista de ecuaciones diferentes no son métricamente equivalentes.

La idea para demostrar lo primero nos la da el paso 1 del ejemplo 10.16. Allí vimos que, para transformar la cónica C_2' en otra cónica C_2'' con una ecuación como las que sale en la lista del teorema 10.33 (en aquel caso fue una de las ecuaciones del apartado (2) de la lista), lo que hacíamos era *mover* el centro y los ejes de C_2' hasta convertirlos en el punto $(0,0)$ y en las rectas $y = 0$ y $x = 0$. Eso lo conseguíamos haciendo primero un giro y luego una traslación. En general, dada una cónica C arbitraria, gracias al teorema espectral, siempre podremos encontrar un giro g de forma que en la ecuación de $g(C)$ desaparezca el término en xy, que no aparece en ninguna de las ecuaciones de la lista. En ocasiones (cuando la cónica sea una parábola, un par de rectas paralelas o una recta doble) podremos elegir g para que también desaparezca el término en y^2. Geométricamente, en el caso de elipses e hipérbolas, esto significa girar la cónica hasta que los ejes sean horizontal y vertical (compara las figuras 9 y 7), y en el caso de las parábolas, girar la cónica hasta que el eje sea vertical.

En segundo lugar haremos, si es necesario, una traslación t para que desaparezca de la ecuación los términos lineales (cuando a posteriori la cónica no sea una parábola) y el término en x y el término independiente (cuando a posteriori la cónica sea una parábola). Se trata entonces de ver que después de llevar a cabo estos pasos siempre somos capaces de obtener alguna ecuación de las de la lista. En el caso en que la cónica sea una elipse o una hipérbola, esto significa geométricamente transladar el centro de la cónica al punto $(0,0)$ (compara las figuras 7 y 8). En el caso en que la cónica sea una parábola, significa trasladar el vértice de la parábola al punto $(0,0)$.

En segundo lugar tenemos que ver que dos cónicas de la lista con ecuaciones diferentes no son métricamente equivalentes. Vemos en primer lugar que dos cónicas en números distintos de la lista no pueden ser (por el teorema 10.29, del que también daremos a continuación una idea de demostración) afínmente equivalentes y por tanto, tampoco métricamente equivalentes. Nos queda entonces ver que dos cónicas del mismo número pero con ecuaciones distintas no pueden ser métricamente equivalentes. Ilustramos el argumento en el caso en que las dos cónicas estén en el apartado (1), es decir, sean elipses reales. En ese caso, según el ejercicio 10.2 si las elipses tienen ecuaciones distintas de la lista, bien la *distancia focal*, bien la constante que es igual a la suma de distancias de los puntos de una elipse a sus focos, no coincide para las dos elipses. Como una isometría conserva las distancias no puede existir ninguna isometría que transforme una cónica en la otra.

Esbozamos ahora la demostración del teorema 10.29. Ya hemos indicado cómo, por medio de una isometría, llegar de una cónica cualquiera C a una cónica C' con una ecuación como las de la lista del teorema 10.33. Sin embargo, la lista de ecuaciones del teorema 10.29 es mucho más reducida por lo que tenemos que transformar más (haciéndola aún más sencilla) la ecuación de C'. Para ello hacemos un argumento como el del ejemplo 10.21. Lo ilustramos otra vez con el caso de las elipses. La cónica C' tendrá una ecuación $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, donde $a \geq b > 0$. Consideramos entonces el isomorfismo afín f (que, en general, *no será* una isometría; solo lo será si $a=b=1$) de ecuaciones

$$\begin{array}{rcl} x' & = & \frac{1}{a}x \\ y' & = & \frac{1}{b}y\ . \end{array}$$

Entonces $f(C')$ tiene ecuación $x^2+y^2-1=0$.

Finalmente vemos que dos cónicas C y C' de ecuaciones distintas de la lista del teorema 10.29 no son afínmente equivalentes. Si lo fueran, existirían matrices asociadas $M(C)$ y $M(C')$ que serían congruentes y tales que sus submatrices $m(C)$ y $m(C')$ también lo serían. Eso implicaría que $M(C)$ y $M(C')$ tendrían el mismo rango y el mismo número de entradas positivas y negativas en la diagonal (por la *ley de inercia*) y lo mismo pasaría para $m(C)$ y $m(C')$. Sin embargo, es un sencillo ejercicio comprobar que cónicas con distintas ecuaciones de la lista siempre dan lugar a matrices (recuerda que la matriz asociada a una cónica no es única; solo es única salvo producto por escalar no nulo) para las que uno de esos invariantes citados cambia. □

La observacion 10.28 y el teorema 10.29 nos permiten obtener el siguiente método rápido para saber cuándo dos cónicas reales son afínmente equivalentes y para conocer la clase afín de una cónica real C:

Teorema 10.34. *Sea C una cónica de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$, sea*

$$M(C)=\begin{pmatrix} a_{00} & \frac{1}{2}a_{01} & \frac{1}{2}a_{02} \\ \frac{1}{2}a_{01} & a_{11} & \frac{1}{2}a_{12} \\ \frac{1}{2}a_{02} & \frac{1}{2}a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

una matriz asociada a C y sea

$$m(C)=\begin{pmatrix} a_{11} & \frac{1}{2}a_{12} \\ \frac{1}{2}a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Sea $R(C)$ el rango de $M(C)$, sea $\Sigma(C)=\Sigma(M(C))$ el valor absoluto de la diferencia entre el número de entradas positivas y el número de entradas negativas de una matriz diagonal congruente con $M(C)$, sea $r(C)$ el rango de $m(C)$ y sea $\sigma(C)=\sigma(m(C))$ la el valor absoluto de la diferencia entre el número de entradas positivas y el número de entradas negativas de una matriz diagonal congruente con $m(C)$ (recuerda que $R(C), \Sigma(C), r(C)$ y $\sigma(C)$ no dependen de la matriz asociada a C elegida). Entonces la clase de equivalencia *afín de C viene determinada por los valores de $R(C), \Sigma(C), r(C)$ y $\sigma(C)$, según la tabla siguiente:*

Clase afín de C	$R(C)$	$\Sigma(C)$	$r(C)$	$\sigma(C)$
Elipse real$^{(1,2)}$	3	1	2	2
Parábola$^{(1,2)}$	3	1	1	1
Hipérbola$^{(1,2)}$	3	1	2	0
Elipse imaginaria$^{(1)}$	3	3	2	2
Par de rectas reales paralelas$^{(2)}$	2	0	1	1
Par de rectas reales secantes$^{(2)}$	2	0	2	0
Par de rectas imaginarias paralelas	2	2	1	1
Par de rectas imaginarias secantes	2	2	2	2
Recta doble$^{(2)}$	1	1	1	1

(1): Las elipses (reales o imaginarias), parábolas e hipérbolas se denominan cónicas no degeneradas *y el resto se denominan* cónicas degeneradas. *(2): Las elipses reales, parábolas, hipérbolas, pares de rectas reales (paralelas o secantes) y rectas dobles se denominan* cónicas reales *y el resto se denominan* cónicas imaginarias.

En particular dos cónicas C_1 y C_2 de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ son afínmente equivalentes si y solo si $R(C_1) = R(C_2)$, $r(C_1) = r(C_2)$, $\Sigma(C_1) = \Sigma(C_2)$ y $\sigma(C_1) = \sigma(C_2)$.

Demostración. Observamos por una parte que si calculamos los invariantes R, Σ, r y σ de cada cónica C de la lista del teorema 10.27, obtenemos todas las cuaternas de invariantes que aparecen en la tabla. Por otra parte, el teorema 10.32 nos dice entre otras cosas que si dos cónicas C_1 y C_2 son afínmente equivalentes, $R(C_1) = R(C_2)$, $\Sigma(C_1) = \Sigma(C_2)$, $r(C_1) = r(C_2)$ y $\sigma(C_1) = \sigma(C_2)$. Por ello, si C es de una determinada clase de equivalencia afín, sus invariantes R, Σ, r y σ son como indica la tabla.

Por otra parte, dada una cónica C de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ sabemos por el teorema 10.27 que C es afínmente equivalente a una de las cónicas cuyas ecuaciones aparecen en la lista del enunciado de dicho teorema. Por el teorema 10.32 sabemos que esa cónica tiene los mismos invariantes R, Σ, r y σ que C. Como la cuaterna formada por los invariantes R, Σ, r y σ de las nueve cónicas de la lista de 10.27 es distinta en cada caso, los valores $R(C), \Sigma(C), r(C)$ y $\sigma(C)$ determinan a qué cónica de la lista del teorema 10.27 es afínmente equivalente C. □

Corolario 10.35. *Sea C una cónica de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ y sean $R(C), \Sigma(C), r(C)$ y $\sigma(C)$ como en el enunciado del teorema 10.32b. Entonces*

(1) *C es una cónica no degenerada si y solo si $R(C) = 3$;*

(2) *C es un par de rectas si y solo si $R(C) = 2$;*
(3) *C es una recta doble si y solo si $R(C) = 1$; y*
(4) *C es una cónica real si y solo si $\Sigma(C) = 0, 1$.*

Demostración. Es consecuencia directa del teorema 10.34. □

En el caso de las cónicas complejas tenemos un teorema similar al teorema 10.34, aunque más sencillo, ya que la clasificación que aparece en el teorema 10.31 también lo es (dejamos al lector que deduzca un cuadro como el del teorema 10.34):

Teorema 10.36. *Con la notación introducida en el teorema 10.34, dos cónicas C_1 y C_2 de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{C}}$ son afínmente equivalentes si y solo si $R_1 = R_2$ y $r_1 = r_2$.*

Demostración. Ejercicio. □

Los teoremas 10.34 y 10.36 nos dan un criterio "algebraico" (ya que lo que hacemos es comprobar rangos y signaturas de ciertas matrices) para clasificar afínmente las cónicas. Más adelante, cuando usemos la Geometría Proyectiva para estudiar las cónicas afines, daremos un criterio geométrico de clasificación.

Cónicas y referencias cartesianas

Aprovechamos que hemos escrito las ecuaciones de las cónicas en forma matricial para ver cómo cambia la ecuación de una cónica cuando cambiamos de coordenadas. Si una cónica de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{k}}$ tiene ecuación $F = 0$ y llamamos C al conjunto de puntos $\{(x, y) \in \mathbf{A}^2_{\mathbf{k}} | F(x, y) = 0\}$ y si, por otra parte consideramos una referencia cartesiana $\mathscr{R}'$ de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{k}}$ tal que las ecuaciones del cambio de referencia de $\mathscr{R}'$ a la referencia canónica $\mathscr{R}_c$ de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{k}}$ son

$$\begin{array}{rcl} x &=& \alpha_{11}x' + \alpha_{12}y' + \beta_1 \\ y &=& \alpha_{21}x' + \alpha_{22}y' + \beta_2, \end{array}$$

entonces los puntos de C son aquellos cuyas coordenadas (x', y') en $\mathscr{R}'$ cumplen la ecuación $G(x', y') = F(\alpha_{11}x' + \alpha_{12}y' + \beta_1, \alpha_{21}x' + \alpha_{22}y' + \beta_2) = 0$. El polinomio G es un polinomio (en las variables x', y') de grado 2 tal y como veremos en la observación 10.38. Es decir $G = 0$ sigue siendo la ecuación de una cónica, (de hecho, de la misma cónica que teníamos, pero en coordenadas en $\mathscr{R}'$). Esto motiva que demos la siguiente definición de ecuación y matriz de una cónica en un sistema de referencia cartesiano $\mathscr{R}'$ de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{k}}$ que no es necesariamente el sistema de referencia canónico:

Definición 10.37. Sea C una cónica de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{k}}$ de ecuación $F = 0$ y sea $M(C)$ una matriz asociada de C. Sea $\mathscr{R}' = \{o'; B'\}$ una referencia cartesiana de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{k}}$, sean

$$\begin{array}{rcl} x &=& \alpha_{11}x' + \alpha_{12}y' + \beta_1 \\ y &=& \alpha_{21}x' + \alpha_{22}y' + \beta_2 \end{array}$$

las ecuaciones del cambio de referencia de $\mathscr{R}'$ a la referencia canónica $\mathscr{R}_c$ y sea $M_{\mathscr{R}',\mathscr{R}_c}$ la matriz de cambio de referencia de $\mathscr{R}$ a $\mathscr{R}_c$, es decir

$$M_{\mathscr{R}',\mathscr{R}_c} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \beta_1 & \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \beta_2 & \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}.$$

Diremos que $F(\alpha_{11}x' + \alpha_{12}y' + \beta_1, \alpha_{21}x' + \alpha_{22}y' + \beta_2) = 0$ es la *ecuación de C respecto de la referencia $\mathscr{R}'$* y que

$$M_{\mathscr{R}'}(C) = M^t_{\mathscr{R}',\mathscr{R}_c} M(C) M_{\mathscr{R}',\mathscr{R}_c}$$

es una *matriz de C respecto de la referencia $\mathscr{R}'$* (la matriz de C respecto de la referencia $\mathscr{R}'$ es única salvo producto de un elemento no nulo de $\mathbf{k}$).

Observación 10.38. Como $m(C)$ no es la matriz nula y M_{B',B_c} es invertible, es claro que
$$M^t_{B',B_c} \cdot m(C) \cdot M_{B',B_c}$$
tampoco es nula, por lo que $F(\alpha_{11}x' + \alpha_{12}y' + \beta_1, \alpha_{21}x' + \alpha_{22}y' + \beta_2)$ es un polinomio de grado 2.

Observación 10.39. Según la definición 10.37, $F = 0$ es la ecuación de C respecto de la referencia canónica y $M(C)$ es una matriz de C respecto de la referencia canónica.

Proposición 10.40. *Sea C una cónica de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{k}}$ y sean $\mathscr{R}_1$ y $\mathscr{R}_2$ dos sistemas de referencia cartesianos de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{k}}$. Entonces*
$$M_{\mathscr{R}_2}(C) = M^t_{\mathscr{R}_2,\mathscr{R}_1} M_{\mathscr{R}_1}(C) M_{\mathscr{R}_2,\mathscr{R}_1}.$$

Demostración. Ejercicio. □

Observación 10.41. Abordamos ahora la situación en $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$. Si tenemos la ecuación (o la matriz) en la referencia canónica de una cónica C y hacemos un cambio de coordenadas a una referencia canónica *no rectangular*, obtendremos la ecuación (o la matriz) de C en el nuevo sistema de referencia pero no podremos conocer las propiedades métricas de C mirando su ecuación en esas nuevas coordenadas. Por ello, cuando estemos interesados en las propiedades métricas de una cónica de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ y cambiemos las coordenadas, es necesario que el cambio sea de la referencia canónica a otra referencia cartesiana rectangular y, en general, que nuestros cambios de coordenadas lo sean entre dos referencias $\mathscr{R}_1$ y $\mathscr{R}_2$ rectangulares. Esto se traduce en que en la matriz $M_{\mathscr{R}_2,\mathscr{R}_1}$ de cambio de referencia la submatriz de cambio de base sea *ortogonal*.

Reinterpretamos ahora las relaciones de equivalencia afín y métrica, expresándolas en términos de ecuaciones y cambios de coordenadas.

Observación 10.42. Si nos dan unas ecuaciones

(10.42.1)
$$\begin{array}{rcllll} x' & = & \gamma_{11}x & +\gamma_{12}y & +\delta_1 \\ y' & = & \gamma_{21}x & +\gamma_{22}y & +\delta_2, \end{array}$$

donde $\gamma_{ij}, \delta_k \in \mathbf{k}$ (respectivamente $\mathbf{R}$), tales que la matriz
$$\begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{pmatrix}$$
sea *regular* (respectivamente *ortogonal*) y nos piden interpretarlas, podemos hacerlo de dos formas: (10.42.1) son las ecuaciones de un *cambio de referencia* de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{k}}$ (respectivamente, de un *cambio de referencia rectangular* de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$) pero también son las ecuaciones de un *isomorfismo afín* de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ (respectivamente, de una *isometría* de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$). Lo mismo pasa si nos piden interpretar una matriz
$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \delta_1 & \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \delta_2 & \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{pmatrix}$$
de la que sabemos que
$$\begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{pmatrix}$$
es *regular* (respectivamente *ortogonal*): N es a la vez la matriz de un *cambio de referencia* de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{k}}$ (respectivamente, de un *cambio de referencia rectangular* de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$) y la matriz de un *isomorfismo afín* (respectivamente, de una *isometría* de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$).

De esta observación se sigue la siguiente proposición:

Proposición 10.43. *Sean C y C' dos cónicas de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{k}}$ (respectivamente, de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$). Entonces C y C' son afínmente equivalentes (respectivamente, métricamente equivalentes) si y solo si existen dos referencias cartesianas (respectivamente, referencias cartesianas rectangulares) $\mathscr{R}$ y $\mathscr{R}'$ tales que la ecuación de C respecto de $\mathscr{R}$ es la misma que la ecuación de C' respecto de $\mathscr{R}'$ salvo, quizás, producto por un escalar no nulo de $\mathbf{k}$ (respectivamente, de $\mathbf{R}$).*

De igual forma, C y C' son afínmente equivalentes (respectivamente, métricamente equivalentes) si y solo si existen dos referencias cartesianas (respectivamente, referencias cartesianas rectangulares) $\mathscr{R}$ y $\mathscr{R}'$ tales que $M_{\mathscr{R}}(C) = \lambda M_{\mathscr{R}'}(C')$ para algún $\lambda \in \mathbf{k}^*$ (respectivamente, de $\mathbf{R}^*$).

En vista de la observación 10.42, el proceso descrito en el paso 1 del ejemplo 10.16 y en el esbozo de demostración del teorema 10.33, cuando pasamos de una cónica C cualquiera de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ a otra cónica, métricamente equivalente, con una ecuación como las de la lista del teorema 10.33, se puede entender también de esta otra forma. En el caso de una hipérbola o una elipse real, por ejemplo, lo que hacemos es pasar de la ecuación de C respecto del sistema de referencia canónico a la ecuación de C respecto de un sistema de referencia cartesiano rectangular que tiene como centro, el centro de C y como base, vectores directores (de norma 1) de los ejes de C. Para más detalles, puedes ver los ejercicios 6, 7 y 8 de la hoja de ejercicios.

Observación 10.44. Quizá te haya sorprendido que mientras en los temas 1 y 2 dedicados a la Geometría Afín y a la Geometría Afín Euclídea los enunciados se hacían para espacios afines y espacios afines euclídeos arbitarios, en este tema hemos trabajos solo en el plano afín estándar $\mathbf{A}^2_{\mathbf{k}}$ y en el plano afín euclídeo estándar $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$. Sin embargo, una vez fijado un sistema de referencia cartesiano (respectivamente, cartesiano rectangular) $\mathscr{R}$ en un plano afín arbitrario (A, V, φ) (resp., en un plano afín euclídeo arbitrario $(A, V, \varphi, <, >)$, no presenta demasiados problemas definir la ecuación o la matriz de una cónica del plano A con respecto de $\mathscr{R}$. De esto se sigue que las cónicas de A tienen las propiedades geométricas que ya hemos estudiado para las cónicas del plano afín estándar $\mathbf{A}^2_{\mathbf{k}}$ y del plano afín euclídeo estándar $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$. Un caso en que tiene interés hablar de cónicas en un plano afín que no es el plano afín estándar es cuando intersecamos una *cuádrica* de $\mathbf{A}^3_{\mathbf{k}}$ con un plano afín de $\mathbf{A}^3_{\mathbf{k}}$. Hemos visto un ejemplo de esto en las intersecciones del cono cuádrico Q con distintos planos (páginas 103–104 y figuras 4, 5, 6, 10 y 11).